Lezione 6 novembre 2023

lunedì 6 novembre 2023 09:44

Def.: Se $Z_p(F(x_0, x_1, x_2))$ e $Z_p(G(x_0, x_1, x_2))$ si intersecano in # finito di punti, e

$$E_2 = (0:0:1) \notin Z_p(F) \cup Z_p(G) \cup \bigcup_{\substack{P_i, P_j \in Z_p(F) \cap Z_p(G) \\ P_i \neq P_j}} \overline{P_i P_j}$$

diremo che SONO IN POSIZ. AMMISSIBILE RISP.

$E_2 = (0:0:1)$

Analog.: POSIZ. AMISS. RISP. $E_1 = (0:1:0)$

$E_0 = (1:0:0)$

Def.: Siano $Z_p(F), Z_p(G) \subseteq \mathbb{P}^2_K$, $K = \overline{K}$

senza componenti comuni; supp. in posiz. ammissibile risp. E_2

Sia $Q \in Z_p(F) \cap Z_p(G)$.

La MOLTEPLICITÀ di INTERSEZIONE delle 2 curve in Q è:

$$I_Q(F, G) := \text{molteplicità algebrica della radice } (c_0 : c_1) \text{ di } R_{x_2}(F, G)$$

$Q = (c_0 : c_1 : c_2)$

Teo: Questa def. non dipende dalle ipotesi geometriche di amm. risp. E_2.

È un Teo. di Teoria delle Singolarità.

OSS.: Se $K = \overline{K}$, 2 curve proiettive in $\mathbb{P}^2_K$ si intersecano SEMPRE.

infatti:
- o hanno una comp. irriducibile comune
- oppure non hanno comp. irriducibili comuni

$\Rightarrow R_{x_2}(F, G) \not\equiv 0$, $K = \overline{K}$

$= R(x_0, x_1)$ ha almeno 1 radice

$\updownarrow$ biiez.

punti di intersezione

$\Rightarrow$ c'è almeno 1 punto di intersezione

Teorema di Bézout (forma forte):

$K = \overline{K}$, $Z_p(F), Z_p(G) \subseteq \mathbb{P}^2_K$

senza comp. irr. comuni

$$\Rightarrow \sum_{Q \in Z_p(F) \cap Z_p(G)} I_Q(F, G) = r \cdot s$$

dove $r = \deg F$, $s = \deg G$

È una generalizzazione del caso retta - curva, già visto.

Dim.: Immediata: F e G non hanno fattori comuni $\Rightarrow$ $\underset{= R(x_0, x_1)}{R_{x_2}(F, G)}$ grado $r \cdot s$

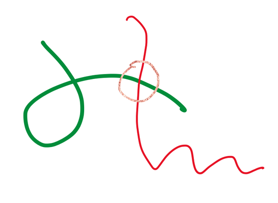
$$\Rightarrow \sum_{(c_0 : c_1) \text{ radice di } R(x_0, x_1)} m_Q(c_0 : c_1) = r \cdot s$$

Def.: Sia $Q \in Z_p(F) \cap Z_p(G)$

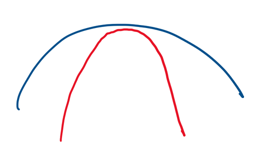
e supp. $Z_p(F)$ e $Z_p(G)$ lisce in Q

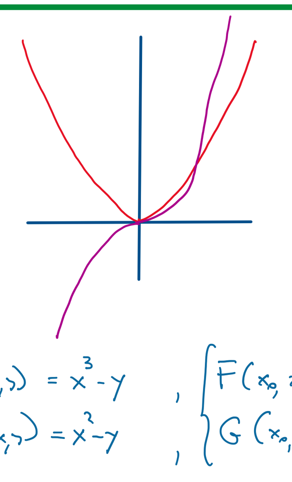
(Q è non sing. per entrambe le curve)

Se $I_Q(F, G) = 1 \Rightarrow$ le 2 curve hanno $\cap$ TRASVERSALE in Q



Se $I_Q(F, G) \geq 2 \Rightarrow$ le 2 curve hanno $\cap$ TANGENZIALE in Q





Esempio: $\begin{cases} y = x^3 \\ y = x^2 \end{cases}$

chiusure proiettive: $f(x, y) = x^3 - y$, $g(x, y) = x^2 - y$, $\begin{cases} F(x_0, x_1, x_2) = x_1^3 - x_0^2 x_2 \\ G(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - x_0 x_2 \end{cases}$

$(x_0 : x_2) = (0:1) \Rightarrow x_1 = 0$

$(x_0 : x_2) = (1:0) \Rightarrow x_1 = 0$

$(x_0 : x_2) = (1:1) \Rightarrow x_1 = 1$

in pos. amm. risp. E_2? NO $F(0,0,1) = 0 = G(0,0,1)$

risp. $E_1 = (0:1:0)$ sì

Cons. $R_{x_1}(F, G) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0^2 x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -x_0^2 x_2 \\ 1 & 0 & -x_0 x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x_0 x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x_0 x_2 \end{pmatrix}$

$\ldots = x_0^3 \, x_2^2 \, (x_2 - x_0)$

Radici: $x_0 = 0$, $(c_0 : c_2) = (0:1)$ con $m_Q(0:1) = 3 \Rightarrow (0:0:1) \in Z_p(F) \cap Z_p(G)$

$I_{(0:0:1)}(F, G) = 3$

$x_2 = 0$

$(c_0 : c_2) = (1:0)$ con $m_Q(1:0) = 2 \Rightarrow (1:0:0)$

$I_{(1:0:0)}(F, G) = 2$

$\Rightarrow (1:0:0)$ è punto di $\cap$ tangenziale

$x_2 = x_0$

$(c_0 : c_2) = (1:1)$, $m_Q(1:1) = 1 \Rightarrow (1:1:1)$

$I_{(1:1:1)}(F, G) = 1$

$\Rightarrow (1:1:1)$ è punto di $\cap$ trasversale