Giovedì 9/10 lezione 8-10

Teo di Bézout: Se $Z_p(F) = Z_p(G) = \mathbb{P}^2_K$, $K = \overline{K}$ non hanno comp. irr. comuni
$\Rightarrow \# Z_p(F) \cap Z_p(G) < +\infty$

e $\sum_{Q \in Z_p(F) \cap Z_p(G)} I_Q(F,G) = \deg F \cdot \deg G$

corollario: Lemma di STUDY:

$K = \overline{K}$, Se $G(x_0, x_1, x_2)$ irreducibile e irriducibile

Se $Z_p(G) \supseteq Z_p(F) \Rightarrow G \mid F$

Dim Segue dall'esercizio: Se $K = \overline{K}$,

G è più irriducibile non nulla

$\Rightarrow Z_p(G) = \mathbb{P}^2_K$ unica istanza punti.

Vogliamo stima dell'omo di Study:
$K = \overline{K}$, $g(x)$ più non nulla

Se $Z(g) \subseteq Z(F) \Rightarrow g \mid F$.

Conclusione: $Z(g)$ ha istanza punti

Teorema: Sia $C = (Z_p(F), F)$, $Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2_K$
$K = \overline{K}$, Δ sing di C sia finita
(cioè F ha la forma ridotta)
Allora $\operatorname{Sing} C = \{Q \in Z_p(F) \mid Q \text{ è singolare}\}$
è un insieme finito

oss: Se F ha forma ridotta:
$F = P_1^{m_1} \cdot P_2^{m_2} \cdots P_r^{m_r}$ $m_i \geq 2$

Conclusione: $Z_p(F)$ è finito di punti singolari

m $F = L^2 \cdot H$
$L = L(x_0, x_1)$
$H = H(x_0, x_1)$

Dim: Sing di C, come F, sia irriducibile.

$\operatorname{Sing} C = Z_p(L_1 F) \cap Z_p(L_2 F) \cap Z_p(L_3 F)$

3 casi:

① è diretta perché $d = 0$, sing $L_1 F = L_2 F = 0$

$\Rightarrow F = F(x_0) = a \cdot x_0^d$

la ciclotomica F con la forma ridotta

$\Rightarrow d = 1$: $F = a x_0$

$Z_p(F) = \emptyset$, $\operatorname{Sing} C = \emptyset$ di ha insiemi finito

② è diretta per $d_{x_0} F \equiv 0$

$\Rightarrow F = F(x_1, x_2)$; $K = \overline{K}$
polinomio omogeneo

$\Rightarrow F = \prod_{i=1}^{d} (c_i' x_1 - c_i' x_2)$

$\Rightarrow Z_p(F) = \bigcup_{i=1}^{d} Z_p(c_i' x_1 - c_i' x_2)$

sono rette passanti per $(0,0,1)$

Può sto supponendo F irriducibile

$\Rightarrow d = 1 \Rightarrow Z_p(F)$ è una retta, non ha punti singolari

③ tutte le derivate parziali sono $\neq 0$.

3a) sup $d_{x_0} F$ e $d_{x_1} F$ hanno

fattori comuni : H

se H non è fattore di $d_{x_2} F$

$\Rightarrow Z_p(L_1 F) \cap Z_p(d_{x_0} F) \cap Z_p(d_{x_1} F) \supseteq \underbrace{Z_p(H)}_{\substack{= \text{finito} \\ \text{per Bézout}}} \cap Z_p(d_{x_2} F)$

$d_{x_0} F = H \cdot H_1$
$d_{x_1} F = H \cdot H_2$

$\Rightarrow Z_p(L_1 F) = Z_p(H) \cup Z_p(H_1)$
$Z_p(d_{x_2} F) = Z_p(H) \cup Z_p(H_2)$

$\Rightarrow \operatorname{Sing} C = \underbrace{(Z_p(H) \cap Z_p(d_{x_2} F))}_{\# \text{ finito}} \cup \underbrace{(Z_p(H_1) \cap Z_p(H_2) \cap Z_p(H_3 F))}_{\substack{\text{non comp comuni} \\ \# \text{ finito per Bézout}}}$

3b) $d_{x_0} F$ e $d_{x_1} F$ hanno fattore comune H, che è comune a $d_{x_2} F$

$d_{x_0} F = H \cdot F_0$, $d_{x_1} F = H \cdot F_1$, $d_{x_2} F = H \cdot F_2$

Uso Eulero:

$\underset{\text{cost}}{d} \cdot F = x_0 \cdot d_{x_0} F + x_1 \cdot d_{x_1} F + x_2 \cdot d_{x_2} F$

$= H \cdot (x_0 F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2)$

$\Rightarrow F$ è riducibile $\Rightarrow$ contraddice ipotesi
F irriducibile

3c) $d_{x_0} F$, $d_{x_1} F$, $d_{x_2} F$ non hanno fattori comuni a due due, per Bézout sono in numero finito.

Secondo caso: F riducibile:

$F = F_1 F_2 \cdots F_r$, F_i polinomi irriducibili

$Z_p(F) = Z_p(F_1) \cup Z_p(F_2) \cup \cdots \cup Z_p(F_r)$

$\# \operatorname{Sing} C < +\infty$

per punto primo.

$\operatorname{Sing}(C) = \left(\bigcup_{i=1,\dots,r} \operatorname{Sing} C_i\right) \cup \left(\bigcup_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,\dots,r}} (Z_p(F_i) \cap Z_p(F_j))\right)$

$C_i = (Z_p(F_i), F_i)$

$\# \text{ finito per Bézout}$

unione finita di insiemi finiti

es.:

Esercizio: Se $F = F_1 F_2$

$\Rightarrow \operatorname{Sing} C \supseteq Z_p(F_1) \cap Z_p(F_2)$

$C = (Z_p(F), F)$

Vogliamo: C irriducibile $\Rightarrow \# \operatorname{Sing} C \leq \frac{(\deg F - 1)(\deg F - 2)}{2}$

Alla sup di Bézout
Es: $Z_p(F), Z_p(G) \subseteq \mathbb{P}^2_K$, $K = \overline{K}$
non aspetti non:
Se $Q \in Z_p(F) \cap Z_p(G)$
e sup $x_0(Q) = 0$, $x_1 = x_2 = 0$
$x_0(Q) = 0$

Allora $I_Q(F,G) = 1$

Dim: G irriducibile sup $F \cdot G$
$\Rightarrow$ non non sup $F_1 = 0 \Rightarrow$
$F = F_1 x^d + F_2 x^{d-1} + \cdots + F_{d-1} x + F_d$
$F_i \in K[x_1, x_2]$, $F_i \in K[x_1, x_2, \dots]$

$G = G_1 x^e + G_2 x^{e-1} + \cdots + G_{e-1} x + G_e$
$\deg G = e$
e sup $Q = (0, 0, 1) \in \mathbb{A}^3 = \{(x_0, x_1, x_2) \mid x_0 = 0\}$

Dunque sup e x_0:

$f(x_1) = F(x_1, x_2) = f_1 \cdot y^d + f_{2} \cdot y^{d-1} + \cdots + f_{d-1} \cdot y + f_d$

$f_1, f_2, \dots, f_d \in K[x_1]$

$g(x_1) = G(x_1, x_2) = g_1 \cdot y^e + g_2 \cdot y^{e-1} + \cdots + g_{e-1} \cdot y + g_e$

$\tilde{Q} = (0, 0) \in \mathbb{A}^2 = \{x_0^{-1}(\{0\})\}$

$m_Q(F) = \underbrace{p}_{\text{finito}} = m_{\tilde{Q}}(f)$, $\tilde{Q} = (0, 0)$

$\Rightarrow f(x_1)$ non ci sono monomi di grado $< p = s$

$\Rightarrow f_0 = f_0(x)$ è divisibile per x^s
$= a_0(x) \cdot x^s$

$f_1 = f_1(x)$ è divisibile per x^{s-1}
$\vdots$

$f_{s-1} = f_{s-1}(x)$ è divisibile per x
$= a_{s-1}(x) \cdot x$

$m_Q(G) = s - m_{\tilde{Q}}(g)$: $g_0 = g_0(x)$ è divis per x^s
$g_1 = g_1(x) \to x^{s-1}$
$\vdots$
$g_{s-1} \to x$

$$\begin{pmatrix} f_r & f_{r-1}(x) & \dots & f_p(x) & a_{p+1} x & a_{p+2} x^2 & \dots & a_q \cdot x^{p-1} & a_0 \cdot x^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_r & f_{r-1}(x) & \dots & f_p(x) & a_{p+1} x & a_{p+2} x^2 & \dots & a_1 x^{p-1} & a_0 x^p & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & f_r & f_{r-1}(x) & \dots & f_p(x) & a_{p+1} x & a_{p+2} x^2 & \dots & a_1 x^{p-1} \; a_0 x^p \\ g_s & g_{s-1} & \dots & & g_{s-1} \cdot x & \dots & & g_1 \cdot x^{s-1} & g_0 \cdot x^s & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & g_s & g_{s-1} & \dots & g_{s-1} \cdot x & \dots & g_1 x^{s-1} & g_0 x^s \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot x \\ \cdot x^2 \\ \vdots \\ \cdot x^q \\ \cdot x \\ \cdot x^2 \\ \vdots \\ \cdot x^p \end{matrix}$$

Caso per Teo Bézout

$x^{R(f,g)} \cdot x^{s(f,g)} \cdot R(f,g) = x^{\max(r,s)} \cdot L(x)$

$\Rightarrow R(f,g) = x^{r+s} \cdot L(x)$

$\Rightarrow$ la radice $x = 0$ è nulla di ordine $r+s$; non sing di $\tilde{Q}$

$\Rightarrow \tilde{Q}$ radice $I_{\tilde{Q}}(f,g) = r+s$

$\Rightarrow Q$ radice $I_Q(F,G) = r+s$