RINORMALIZZAZIONE delle teorie di gauge non-abeliane

Consideriamo la lagrangiana BARE (in gauge di Lorentz) per qualche gruppo di Lie G:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a\right)^2 + \frac{1}{2} g f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b \left(\partial^\mu A^{c\nu} - \partial^\nu A^{c\mu}\right) \\ &- \frac{1}{4} g^2 f^{bce} f^{dea} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu} + \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^{a\mu}\right)^2 \\ &- \bar{c}^a \partial^2 c^a - g\, \bar{c}^a \partial^\mu f^{abc} A_\mu^b c^c \\ &+ i \bar{\psi} \not{\partial} \psi - m \bar{\psi}\psi - g \bar{\psi} \gamma^\mu t_R^a \psi A_\mu^a \quad \leftarrow \text{campo fermionico in rep. } R \text{ di } G\end{aligned}$$

Grado di divergenza

- $\mathcal{L}$ contiene termini di mass-dim ≤ 4 $\rightarrow$ ci aspettiamo infiniti in un numero finito di ampiezze

- Abbiamo diversi tipi di VERTICI della forma

$$(m, n, k) \quad \text{con} \quad \begin{cases} m & \text{linee fermioniche} \\ n & \text{bosoni di gauge} \\ k & \text{ghost} \end{cases}$$

$V_{(m,n,k)}$ = # vertici del tipo (m, n, k)

- Ricordiamo le seguenti relazioni:

$$2 V_{(2,1,0)} = E_f + 2 I_f$$

E_φ = # linee est. del campo φ

I_φ = # linee interne del campo φ

$$V_{(2,1,0)} + 3V_{(0,3,0)} + 4V_{(0,4,0)} + V_{(0,1,2)} = E_A + 2I_A$$

$$2V_{(0,1,2)} = E_c + 2I_c$$

$$\Downarrow$$

$$2I_f = 2V_{(2,1,0)} - E_f$$

$$2I_b \equiv 2I_A + 2I_C = V_{(2,1,0)} + 3V_{(0,3,0)} + 4V_{(0,4,0)} +$$

$$+3V_{(0,1,2)} \underbrace{- E_A - E_C}_{\equiv -E_b}$$

- Il numero di loop è

$$L = \underbrace{I_f + I_b}_{\text{momenti interni}} \underbrace{- V_{(2,1,0)} - V_{(0,3,0)} - V_{(0,4,0)} - V_{(0,1,2)} + 1}_{-\#\text{ funz. }\delta}$$

$$\int \frac{\prod_i d^d q_i}{\prod \text{propagators}} \quad (p \text{ nei vertici})$$

$$\Downarrow$$

Il grado di divergenza è dato da

$$D = \underbrace{dL}_{\text{misura di integrali}} \underbrace{- 2I_b - I_f}_{\text{propagatori}} + \underbrace{V_{(0,1,2)} + V_{(0,3,0)}}_{p \text{ nei vertici}}$$

$$D = d\left(I_f + I_b - V_{(2,1,0)} - V_{(0,3,0)} - V_{(0,1,2)} + 1\right) - 2I_b - I_f + V_{(0,1,2)} + V_{(0,3,0)}$$

$$= \underline{I_f(d-1)} + \underline{I_b(d-2)} - dV_{(2,1,0)} - (d-1)V_{(0,3,0)} - dV_{(0,4,0)} - (d-1)V_{(0,1,2)} + d$$

$$= (d-1)\left(V_{(2,1,0)} - \frac{E_f}{2}\right) + \frac{(d-2)}{2}\Big(V_{(2,1,0)} + 3V_{(0,3,0)} + 4V_{(0,4,0)} + 3V_{(0,1,2)} - E_b\Big) - \dots$$

$$= d - \frac{d-1}{2}E_f - \frac{d-2}{2}E_b + V_{(2,1,0)}\Big(\overbrace{d-1+\frac{d-2}{2}-d}^{\frac{d-4}{2}}\Big)$$

$$+ V_{(0,3,0)}\Big(\overbrace{\frac{3}{2}(d-2)-d+1}^{\frac{d-4}{2}}\Big) + V_{(0,4,0)}\Big(\overbrace{2d-4-d}^{d-4}\Big)$$

$$+ V_{(0,1,2)}\Big(\underbrace{1-d+\frac{3}{2}(d-2)}_{\frac{d-4}{2}}\Big)$$

$$= d - \frac{d-1}{2}E_f - \frac{d-2}{2}E_b + \frac{d-4}{2}\Big[V_{(2,1,0)} + V_{(0,3,0)} + 2V_{(0,4,0)} + V_{(0,1,2)}\Big]$$

La dipendenza di D dal # di vertici si annulla per $d=4$ ($\leftrightarrow$ operatori in $\mathcal{L}$ sono di mass-dim $=4$)

In $d=4$

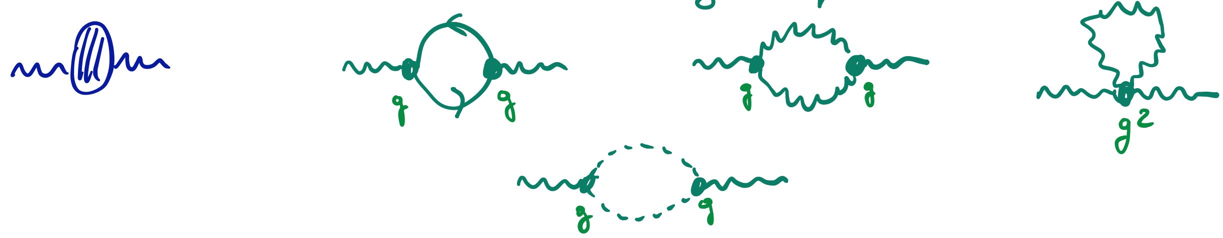
$$D = 4 - \frac{3}{2}E_f - E_b$$

$\Rightarrow$ c'è un numero finito di ampiezze 1PI che sono potenzialmente divergenti

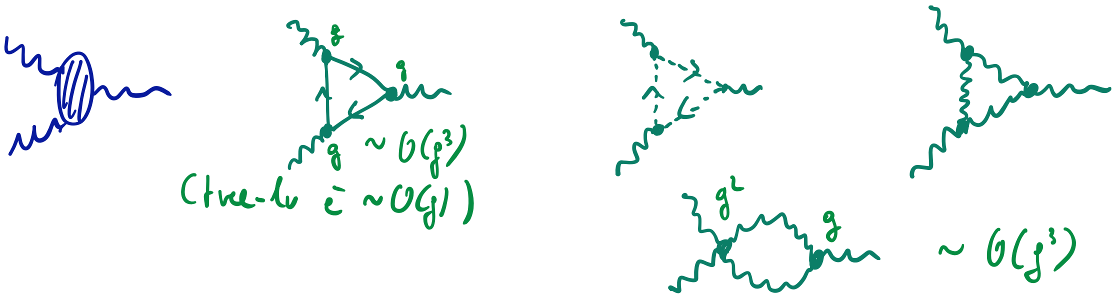
Andiamo a vedere quali sono tali 1PI amp. divergenti. (Tralasciamo 0pt e 1pt)

All'ordine g^2 rispetto a tree-level

$D=2$



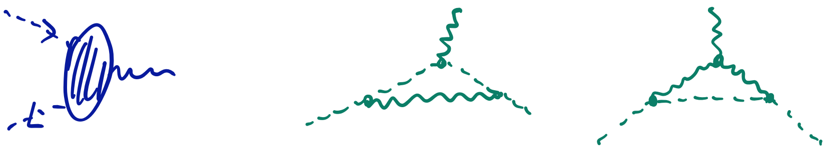
$D=1$



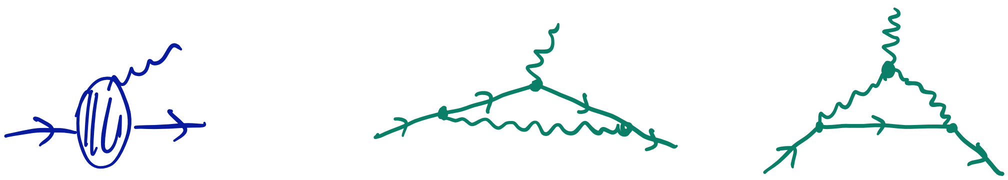
$\sim O(g^3)$

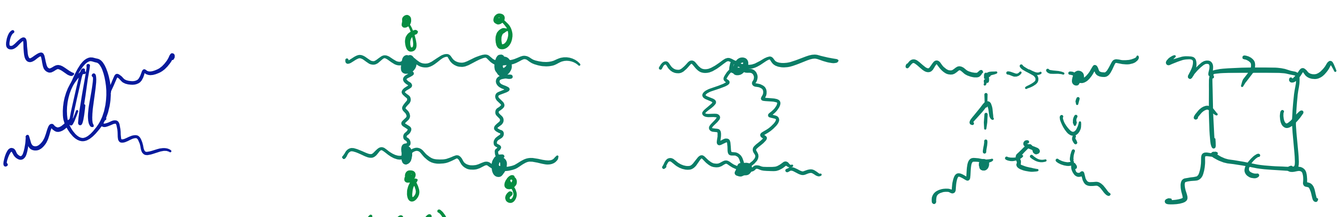
(tree-lv è $\sim O(g)$)

$\sim O(g^3)$



$D=0$



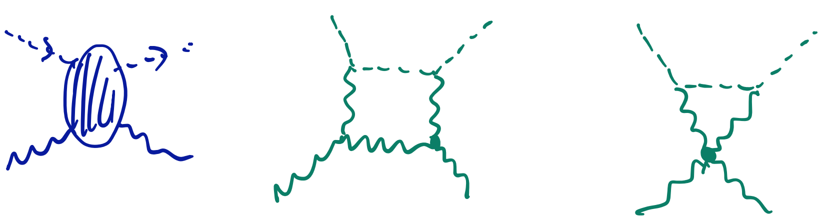


$\sim O(g^4)$ (tree-lv è $O(g^2)$)

(*)

?

Non ci sono termini in $\mathcal{L}$ del tipo $(\bar{c}c)^2$



?

$\bar{c}cAA$

(*) sono apparentemente divergenti.
L'id di Ward relativa alla simmetria ($\bar{c} \mapsto \bar{c} + \gamma$ cost.) permette di capire che il vero grado di div. è < 0.

Antighost TRANSLATION invariance:

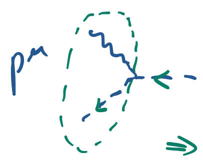
$\mathcal{L}_{gh} = \partial^\mu \bar{c}\, D_\mu c$ inv. sotto $\bar{c} \mapsto \bar{c} + \gamma$ γ cost

$$\int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\; e^{i\int \mathcal{L}_{gh}}\, \bar{c}(y) = \int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\; e^{i\int \mathcal{L}_{gh} + i\int \partial^\mu \gamma(x) D_\mu c}\, (\bar{c}(y) + \gamma(y))$$

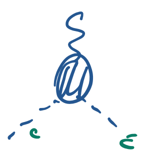
cambio coord. usando
$\bar{c} \mapsto \bar{c} + \gamma(x)$

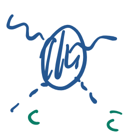
$$= \int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\; e^{i\int \mathcal{L}_{gh}}\, \bar{c}(y) + \int \gamma(x) \langle (-i)\partial^\mu D_\mu c(x)\, \bar{c}(y) \rangle\, d^4x + \int \gamma(x)\, \delta(x-y)\, d^4x$$

$$\Rightarrow \partial^\mu_x \langle i \underbrace{D_\mu c(x)\, \bar{c}(y)}_{\text{CORRENTE dell'ANTI-GH TRANSL.}} \rangle = \delta(x-y)$$


= costante fissata


$\Rightarrow$ per ogni linea di $\bar{c}$ tolgo un grado di div.

$\Rightarrow$  $D = 1 \to D = 0$ ancora div.

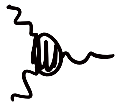
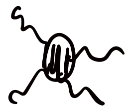
 $D = 0 \to D = -1$

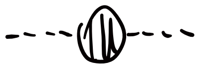
 $D = 0 \to D = -2$

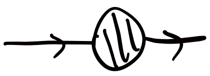
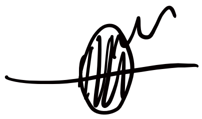
} Convergenti

Qta simm. è presente per $G(A) = \partial^\mu A_\mu$.
Per altre scelte di $G(A)$, uno ha bisogno di termini $\sim c^4$ per poter rinormalizzare la teoria.

Per cancellare infiniti nelle 1PI, uno aggiunge dei controtermini:

 AA  AAA  $AAAA$

 $\bar{c}c$  $\bar{c}Ac$

 $\bar{\psi}\psi$  $\bar{\psi}A\psi$ $\quad d = 2\omega$

con coeff. proporzionale a $\frac{1}{2-\omega}$

Purtroppo, aggiungere tali termini NON corrisponde a priori a una ridefinizione dei PARAMETRI nella Lagrangiana BARE.

→ i termini in $\mathcal{L}$ appaiono con coeff LEGATI TRA LORO dalla simmetria di BRST

$$\mathcal{L}_B = \underbrace{\text{termini cinetici quadratici}}_{Z\text{'s}} + g\, A A \partial A + g^2 AAAA + g\, \bar{c} A c + g\, \bar{\psi} A \psi$$

Affinché la teoria sia rinormalizzabile, cioè è finita con una opportuna scelta dei parametri (come funz. di ω), bisogna che gli infiniti siano pure legati da relazioni dettate da BRST sym.

Se aggiungiamo i controtermini a $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = -\frac{Z_A}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \frac{Z_V^{(0,3,0)}}{2} g_r f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b (\partial^\mu A^{c\nu} - \partial^\nu A^{c\mu})$$

$$- \frac{Z_V^{(0,4,0)}}{4} g_r^2 f^{bce} f^{dea} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu} + \frac{Z_\xi}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 \qquad (*)$$

$$- Z_c \bar{c}^a \partial^2 c^a - Z_V^{(0,1,2)} g_r \bar{c}^a \partial^\mu f^{abc} A_\mu^b c^c + Z_\psi i \bar{\psi} \partial\!\!\!/ \psi - Z_m m_r \bar{\psi}\psi$$

$$- Z_V^{(2,1,0)} g_r \bar{\psi} \gamma^\mu t_R^a \psi A_\mu^a$$

(i campi sono i CAMPI RINORMALIZZATI $\varphi_B = \varphi_r Z_\varphi^{1/2}$)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\varphi_r, g_r, m_r) + \mathcal{L}_{c.t.}$$

Se uno usa un REGOLARIZZATORE BRST-INVAR. allora le identità di Ward valgono ancora ($\mathcal{L}^{reg}$ è ancora inv. sotto BRST)

↳ relazioni tra i correlatori che ci si può ricavare usando le trasf. di BRST nel P.I.

Applicando le id. di WARD-TAKAHASHI (SLAVNOV-TAYLOR) per la simmetria di BRST, ci si ricava

$$\frac{Z_V^{(0,4,0)}}{Z_V^{(0,3,0)}} = \frac{Z_V^{(0,3,0)}}{Z_A} = \frac{Z_V^{(0,1,2)}}{Z_c} = \frac{Z_V^{(2,1,0)}}{Z_\psi}$$

[Prendiamo trasf. BRST $(\delta\varphi = \epsilon Q_B \cdot \varphi)$

$$Q_B \cdot A_\mu^a = \partial_\mu c^a + a f^{abc} A_\mu^b c^c$$

$$Q_B \cdot c^a = -\frac{b}{2} f^{abc} c^b c^c \qquad Q_B^2 = 0 \Rightarrow b = a = r$$

$$Q_B \bar{c}^a = \gamma \partial^\mu A_\mu^a \qquad Q_B \psi = r i c \psi$$

Imponendo l'inv. sotto BRST della Lagrangiana $\mathcal{L}$ (*)

$$a Z_A = g_r Z_V^{(0,3,0)} \qquad a Z_V^{(0,3,0)} = g_r Z_V^{(0,4,0)}$$

$$a Z_c = g_r Z_V^{(0,1,2)} \qquad a Z_\psi = g_r Z_V^{(2,1,0)}$$

$$Z_V^{(2,1,0)} \mu^{2-\omega} g_r \bar{\psi} \gamma^\mu t_R^a \psi A_\mu^a = g_B \bar{\psi}_B \gamma^\mu t_R^a \psi_B A_{B\mu}^a$$

$$= g_B Z_\psi Z_A^{1/2} \bar{\psi} \gamma^\mu t_R^a \psi A_\mu^a$$

$$\Rightarrow g_B = g_r \mu^{2-\omega} Z_V^{(2,1,0)} Z_\psi^{-1} Z_A^{-1/2} \quad (\star) \quad (d = 2\omega)$$

Potremmo calcolarci g_B utilizzando un altro termine di interazione in $\mathcal{L}$, per esempio $g\, AA\partial A$:

$$Z_V^{(0,3,0)} \frac{g_r}{2} \mu^{2-\omega} AA\partial A = \frac{g_B}{2} A_B A_B \partial A_B$$

$$\rightarrow g_B = g_r \mu^{2-\omega} \frac{Z_V^{(0,3,0)}}{Z_A^{3/2}} = g_r \mu^{2-\omega} \underbrace{\frac{Z_V^{(0,3,0)}}{Z_A}}_{= Z_V^{(2,1,0)} Z_\psi^{-1}} Z_A^{-1/2}$$

Detto altrimenti, ci basta def. g_B come in $(\star)$ per cancellare gli infiniti anche in [diagramma] (e [diagramma], [diagramma])

$$\frac{1}{2} g_B A_B^2 \partial A_B = \frac{1}{2} \mu^{2-\omega} g_r Z_V^{(2,1,0)} Z_\psi^{-1} Z_A^{-1/2} Z_A^{3/2} A^2 \partial A =$$

$$= \frac{1}{2} \mu^{2-\omega} g_r Z_A^{(0,3,0)} A^2 \partial A$$

Id. Slavnov-Taylor

questa è la costante che uno trova richiedendo la cancellaz. di ∞ in [diagramma].