

# L'ASSONOMETRIA

## 1 Generalità

L'Assonometria è uno dei metodi della rappresentazione geometrica più largamente usati in architettura sia per l'efficacia visiva delle relative immagini, sia per la semplicità delle relazioni metriche che legano queste immagini alle configurazioni oggettive da cui derivano.

Tale metodo si avvale di un piano iconico detto *quadro* e di un solo centro di proiezione, essendo tale centro un *punto improprio*, un punto cioè situato a distanza infinita: si tratta infatti di una *proiezione parallela*; dunque l'assonometria, come la prospettiva, fornisce delle figure spaziali un'unica immagine allusiva della tridimensionalità e, come il metodo di Monge, conserva il parallelismo tra le rette e di conseguenza alcune proprietà metriche delle figure.

Il riferimento nello spazio, affinché si stabilisca tra immagine e realtà una corrispondenza biunivoca, oltre al *quadro*  $\pi$  e al *centro di proiezione* (improprio)  $R_\infty$ , prevede ancora una *terna di assi cartesiani ortogonali*,  $x, y, z$ , che individuano due a due i *tre piani coordinati*, rispettivamente  $xy, xz$  e  $yz$ . Ogni ente o figura dati nello spazio vengono relazionati al riferimento cartesiano mediante le tre proiezioni ortogonali sui piani coordinati e, poiché il processo per la costruzione delle immagini assonometriche consiste nella proiezione su  $\pi$ , secondo la direzione  $R_\infty$ , sia dell'oggetto che della terna di assi, il riferimento sul *quadro* – coincidendo quest'ultimo con il foglio del disegno – risulta costituito da una nuova terna di assi  $x', y', z'$ , proiezioni dei primi da  $R_\infty$  e ovviamente complanari in  $\pi$ , detti *assi assonometrici*, ciascuno con la propria unità di misura: tali unità sono le proiezioni (deformate, generalmente in modo disuguale) dei corrispondenti segmenti unitari cartesiani, supposti uguali.

Poiché inoltre le posizioni del quadro e degli assi cartesiani rispetto all'oggetto da rappresentare, nonché la direzione  $R_\infty$  del centro di proiezione possono scegliersi liberamente, è opportuno che uno degli assi (precisamente l'asse  $z$ ) sia considerato verticale, e di conseguenza gli altri due,  $x$  e  $y$ , orizzontali. Infine le posizioni reciproche di assi, quadro e centro di proiezione definiscono diversi tipi di assonometria, ciascuno dei quali comporta sul foglio del dise-

gno (coincidente con  $\pi$ ) una diversa inclinazione degli assi assonometrici e una diversa modificazione delle relative unità di misura.

Una prima suddivisione distingue l'*assonometria obliqua* e l'*assonometria ortogonale*, che si diversificano per la direzione del centro  $R_\infty$  rispetto al quadro  $\pi$ , essendo tale direzione generica nel primo caso, ortogonale a  $\pi$  nel secondo.

## 2 Assonometria ortogonale

### 2.1 Il riferimento

1. *Il riferimento nello spazio.* Nell'*assonometria ortogonale* la direzione  $R_\infty$  del centro di proiezione (fig. 1) – ortogonale al quadro  $\pi$  – è dunque unica e determinata, mentre l'inclinazione del quadro stesso rispetto agli assi cartesiani dati nello spazio resta libera, potendo così verificarsi che gli angoli tra i detti assi e il quadro  $\pi$  (o, ciò che è lo stesso, tra ogni asse e la propria proiezione ortogonale su  $\pi$ ) siano tutti disuguali tra loro, due uguali e dunque uno

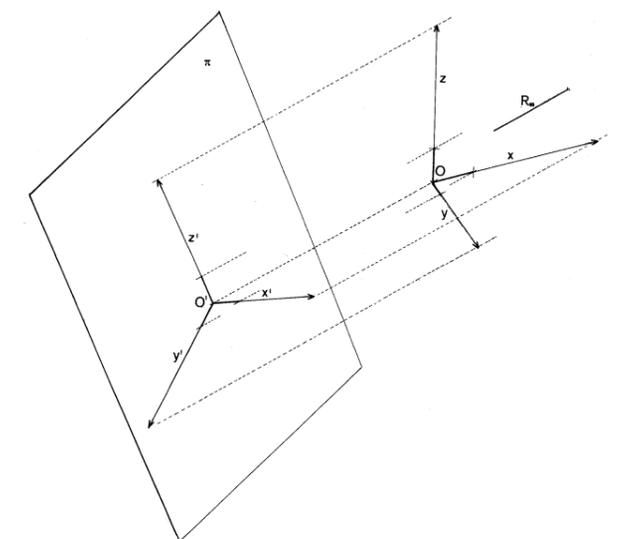


Fig. 1

disuguale, o infine tutti tra loro uguali; in corrispondenza gli angoli che gli assi assonometrici, proiezioni ortogonali dei primi, formano due a due su  $\pi$  risultano rispettivamente tutti disuguali, due soli uguali, tutti tra loro uguali: pertanto l'assonometria viene detta nell'ordine *trimetrica*, *dimetrica*, *monometrica* (o *isometrica*), risultando le relative unità di misura conformemente diversificate o non (figg. 2 a, b, c). Tra le infinite possibilità che ciascuna di tali scelte offre è evidente che vada privilegiata caso per caso quella più idonea a rappresentare un determinato oggetto. Ma se talune scelte, che prevedono gli angoli tra gli assi assonometrici tutti disuguali (assonometria trimetrica), possono risultare visivamente soddisfacenti, è da osservare che la conseguente disuguaglianza delle scale di riduzione rende poco agevole il controllo delle misure, mentre l'assonometria isometrica, comportando lungo i tre assi accorciamenti uguali, offre un evidente vantaggio sia per la costruzione che per l'interpretazione delle relative immagini.

Qualunque sia la scelta, risulta tuttavia più conveniente assegnare direttamente gli *assi assonometrici* sul quadro (cioè sul foglio del disegno), piuttosto che attribuire le reciproche posizioni nello spazio al quadro e agli assi cartesiani.

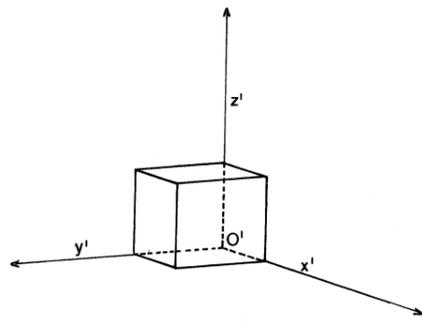


Fig. 2.a

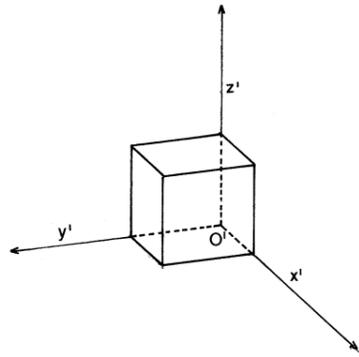


Fig. 2b

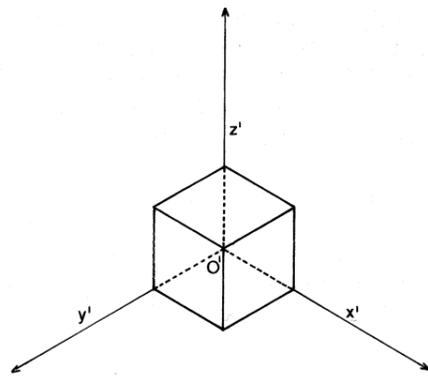


Fig. 2c

2. Il riferimento sul quadro. Data dunque sul foglio del disegno la prescelta terna degli assi assonometrici  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , con l'asse  $z'$  verticale e gli altri due liberamente orientati, la posizione del quadro  $\pi$  rispetto agli assi cartesiani  $x$ ,  $y$ ,  $z$  nello spazio resta determinata dalle tracce su  $\pi$  dei piani coordinati  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$ , dette rispettivamente  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ ; tali tracce, intersezioni con  $\pi$  del triedro trirettangolo costituito dagli stessi piani coordinati – il cui vertice è il punto  $O$  comune ai tre piani e origine degli assi –, individuano il cosiddetto *triangolo delle tracce* o *triangolo fondamentale*, ciascun vertice del quale, ad esempio  $T_x$  (come  $T_y$  e  $T_z$ ) – traccia dell'asse  $x$  ( $y$ , o  $z$ ) dato nello

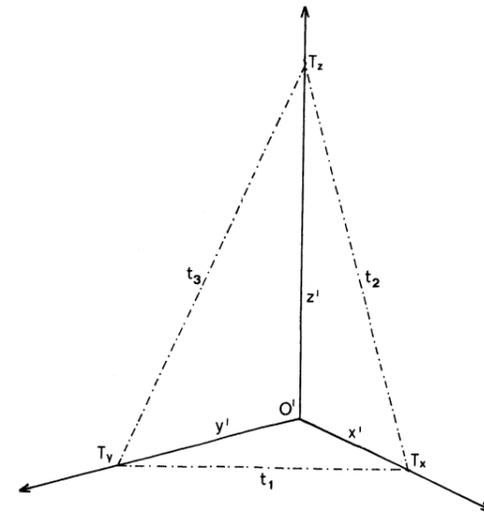


Fig. 3

spazio – appartiene al relativo asse assonometrico  $x'$  ( $y'$ , o  $z'$ ), mentre il lato opposto è ortogonale allo stesso asse (fig. 3). Si osservi che, per una determinata scelta degli assi, a ognuno dei possibili triangoli delle tracce (tutti simili tra loro) corrisponde una diversa distanza del punto  $O$  dal quadro, essendo tuttavia irrilevante tale distanza trattandosi di proiezione parallela.

Con questi dati è possibile determinare gli accorciamenti delle unità di misura su ciascuno degli assi assonometrici, operando sul ribaltamento del relativo piano che li proietta sul quadro (fig.4): ad esempio

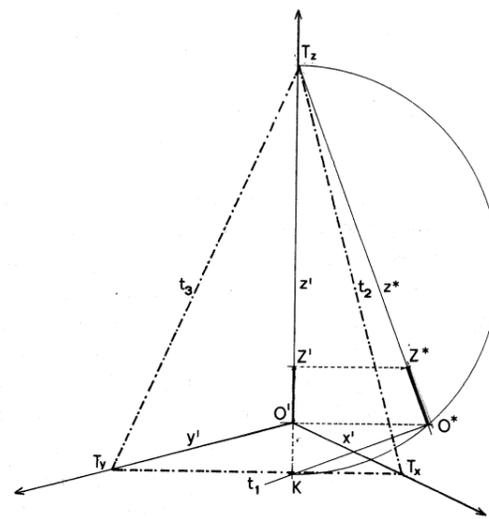


Fig. 4

nel ribaltamento del piano proiettante  $zz'$ , essendo nello spazio la retta  $OO'$  ortogonale a  $z'$ , la ribaltata  $O'O^*$  è ancora ortogonale alla stessa proiezione  $z'$ ; allora il punto  $O^*$  cade sulla normale a  $z'$  per  $O'$  nell'intersezione con la semicirconferenza di diametro  $T_zK$ , essendo  $K$  il punto in cui la retta  $z'$  incontra la traccia del piano  $xy$ : in tal modo il punto  $O^*$  risulta essere il vertice dell'angolo retto  $T_zO^*K$ . Staccato sulla semiretta  $O^*T_z \equiv z^*$ , ribaltata dell'asse  $z$ , il segmento  $O^*Z^*$  uguale all'unità di misura  $u$  degli assi cartesiani nello spazio, la sua proiezione ortogonale  $O'Z' = u_z$  su  $z'$  ne fornisce la relativa unità accorciata. Con operazioni analoghe si costruiscono le unità ridotte  $u_x$  e  $u_y$  degli altri due assi assonometrici.

Una diversa costruzione consente di determinare le unità assonometriche operando due soli ribaltamenti, precisamente quelli di due dei tre piani coordinati sul quadro, ciascuno ruotando intorno alla propria traccia: dato un triangolo delle tracce, il ribaltato  $O^*$  del punto  $O$ , ad esempio rispetto al piano  $xy$ , cade nell'intersezione della normale a  $t_1$  per  $O'$  (prolungamento dell'asse  $z'$ ) con la semicirconferenza di diametro  $T_xT_y$ ; le semirette, evidentemente ortogonali,  $O^*T_x$  e  $O^*T_y$  forniscono i ribaltati  $x^*$  e  $y^*$  degli assi  $x$  e  $y$  (fig.5). Staccati su  $x^*$  e  $y^*$  i segmenti uguali all'unità di misura  $u$  dei rispettivi assi cartesiani nello spazio, se ne determinano i corrispondenti  $O'X'$  e

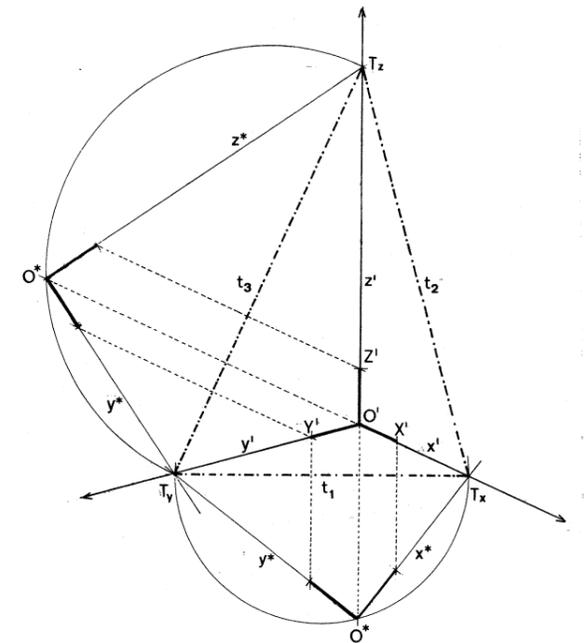


Fig. 5

$O'Y'$  nell'inversa dell'*omologia affine ortogonale di ribaltamento* (S.-V., pp. 100-102), le cui misure  $u_x, u_y$  costituiscono le relative unità assonometriche; la terza unità  $O'Z' = u_z$  si ottiene operando il ribaltamento di uno dei due piani coordinati che contengono l'asse  $z$ .

## 2.2 Rappresentazione degli enti fondamentali

1. Il metodo dell'assonometria, assai efficace per la rappresentazione di configurazioni spaziali, non appare altrettanto conveniente per la soluzione di problemi, né per costruzioni particolarmente complesse, come la determinazione delle ombre relative a superfici variamente curve o composte: in questi casi è preferibile effettuare tutte le necessarie operazioni nel metodo di Monge e trasferirne i risultati nell'immagine assonometrica mediante trasformazioni omologiche, di cui diremo. Ci limitiamo pertanto a definire la rappresentazione di *punti, rette, piani* e ad accennarne le condizioni di reciproca appartenenza e di parallelismo.

2. La proiezione assonometrica  $P'$  di un punto  $P$  – detta *vera assonometria* di  $P$  – si può costruire quando ne siano note le coordinate cartesiane nello spazio, vale a dire la terna ordinata di numeri  $x, y, z$ , che ne individuano le proiezioni  $P_x, P_y, P_z$  sugli omonimi assi del riferimento cartesiano. Tali punti sono le intersezioni con ciascun asse del piano per  $P$  e ortogonale allo stesso asse: infatti il punto  $P$  può considerarsi un primo vertice del parallelepipedo rettangolo di cui i punti  $P_x, P_y, P_z$  sono tre vertici, ancora tre vertici  $P_1, P_2, P_3$  sono le proiezioni ortogonali di  $P$  sui piani coordinati (rispettivamente  $xy, xz, yz$ ) e vengono detti nell'ordine *prima, seconda e terza proiezione assonometrica* di  $P$ , mentre l'ottavo vertice coincide con l'origine  $O$  degli assi: nella figura 6 questi punti sono rappresentati in un'assonometria ortogonale trimetrica.

Più semplicemente si può determinare la vera assonometria  $P'$  di  $P$  mediante la spezzata  $O'P'_x P'_y P'_z$ , i cui lati –  $O'P'_x, P'_x P'_y, P'_y P'_z$  – hanno lunghezze rispettivamente uguali alle coordinate numeriche  $x, y, z$  del punto  $P$  (fig.7). È anche possibile costruire graficamente il punto  $P'$  quando ne sia data una delle tre proiezioni assonometriche, ad esempio  $P'_1$  (e quindi implicitamente le coordinate  $x$  e  $y$  ridotte alle relative scale) e la misura della terza coordinata  $z$ , oppure due proiezioni assonometriche, ad esempio  $P'_1$  e  $P'_2$ .

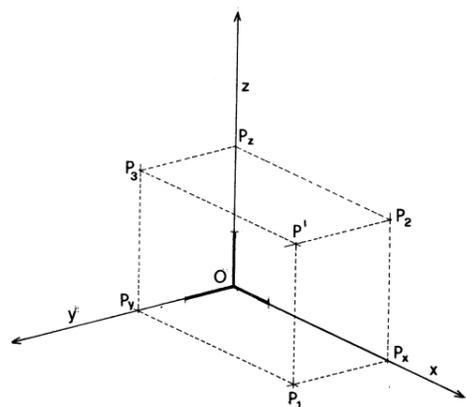


Fig. 6

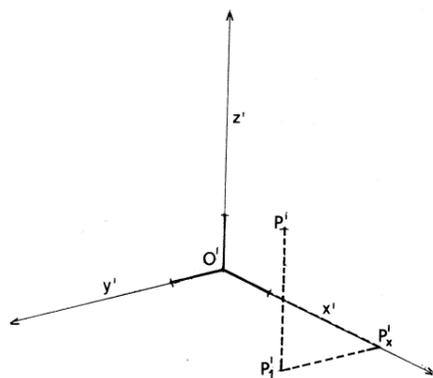


Fig. 7

3. Analogamente una *retta r* è rappresentata dalla *vera assonometria r'* e dalle tre proiezioni ortogonali  $r'_1, r'_2, r'_3$  sui piani coordinati, dette nell'ordine *prima, seconda e terza proiezione assonometrica* di  $r$ , essendo sufficiente anche in questo caso che ne siano assegnate due perché si possa costruire la vera assonometria  $r'$ . Date le proiezioni assonometriche  $r'_1$  ed  $r'_3$  (fig.8) rispettivamente sui piani  $xy$  e  $yz$ , e determinate – come nel metodo di Monge – due delle tre tracce di  $r$  sui piani coordinati, ad esempio  $T_{1r}$  e  $T_{2r}$ , la retta che le congiunge è la *vera assonometria r'* di  $r$ : evidentemente  $r'$  passa anche per la terza traccia  $T_{3r}$ .

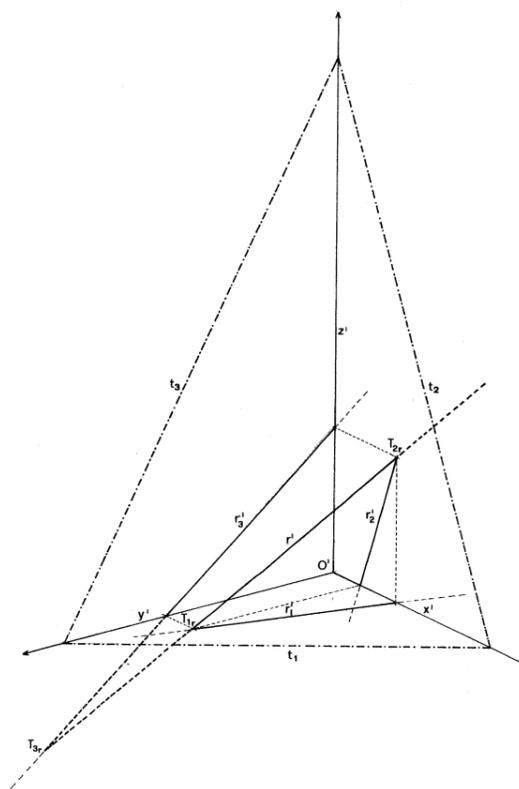


Fig. 8

4. Un *piano generico alpha* si rappresenta mediante le sue tracce  $t_{1\alpha}, t_{2\alpha}, t_{3\alpha}$  sui piani coordinati, rette che si intersecano due a due su ciascuno degli assi, determinando sugli assi stessi dei punti, dei quali può essere improprio: in tal caso, risultando due tracce parallele tra loro e a un asse, il piano  $\alpha$  è parallelo a quell'asse; un piano parallelo a due assi, ad esempio  $x$  e  $z$  e dunque al piano coordinato  $xz$ , ha solo due tracce proprie, rispettivamente parallele a quegli assi, coincidendo con la retta impropria la traccia sul piano  $xz$ .

Se il piano  $\alpha$  è determinato da due rette  $r(r'_1, r')$  ed  $s(s'_1, s')$  incidenti in un punto  $P(P'_1, P')$ , date ciascuna mediante la prima proiezione e la vera assonometria, tali dunque che il punto  $P'$  (comune ad  $r'$  e  $s'$ ) e  $P'_1$  (comune a  $r'_1$  e  $s'_1$ ) appartengano alla stessa retta di richiamo (fig.9), le tracce di  $\alpha$  sui piani coordinati, come nel metodo di Monge, sono quelle che congiungono le tracce omonime delle due rette, ad esempio  $t_{1\alpha}$  è la retta  $T_{1r} T_{1s}$ . È altresì possibile determinare di una retta  $r$  la traccia  $T_r$  sul quadro, costruendo per una delle proiezioni di  $r$ , ad esempio  $r'_1$ , il piano  $\gamma$  verticale, e dunque parallelo all'asse  $z$ , le cui tracce sugli altri due coor-

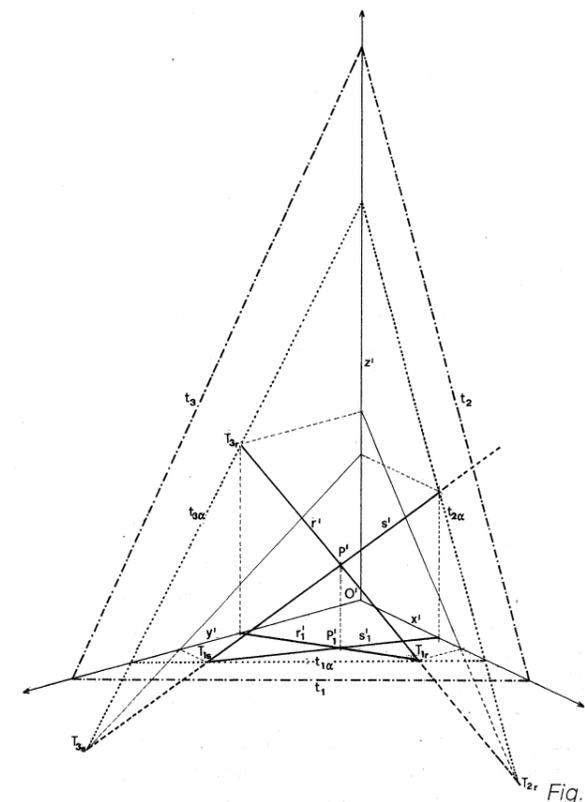


Fig. 9

dinati, parallele a  $z'$ , intersecano le rette  $t_2$  e  $t_3$ , lati del triangolo fondamentale, in due punti,  $t_2$  e  $t_3$ , la cui congiungente è la traccia  $t_\gamma$  su  $\pi$  di  $\gamma$ : il punto in cui  $t_\gamma$  incontra  $r'$  è la traccia  $T_r$  della retta  $r$  su  $\pi$  (fig. 10).

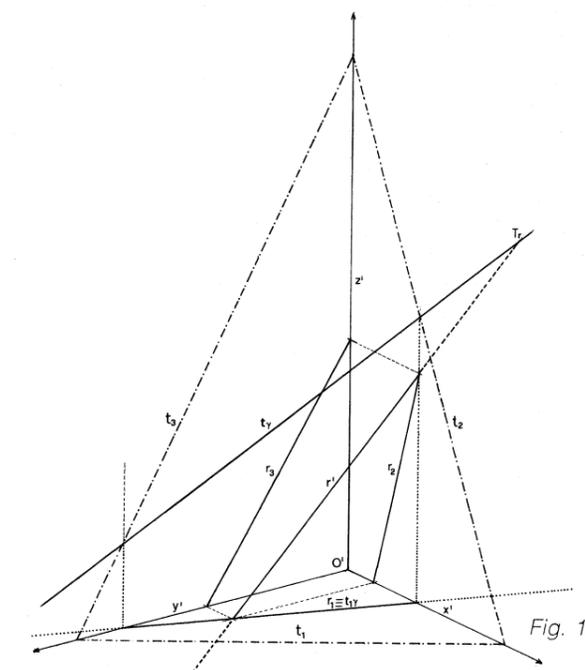


Fig. 10

Analogamente è possibile costruire la traccia  $t_\alpha$  sul quadro di un piano  $\alpha$ , dato mediante le tracce sui piani coordinati, congiungendo tra loro i punti in cui ciascuna traccia incontra il lato omonimo del triangolo fondamentale: evidentemente è sufficiente congiungere due soli di tali punti (ad esempio il punto comune a  $t_{1\alpha}$  e  $t_1$  e quello comune a  $t_{2\alpha}$  e  $t_2$ ), perché la retta  $t_\alpha$  passi anche per il terzo punto (fig. 11a); se una delle tracce di  $\alpha$  sui piani coordinati è parallela a uno dei lati del triangolo fondamentale, anche la retta  $t_\alpha$  risulta parallela a quella traccia (fig. 11b).

5. Le condizioni di appartenenza e di parallelismo sono analoghe alle corrispondenti condizioni che si stabiliscono nel metodo di Monge, e precisamente: condizione necessaria e sufficiente perché un punto appartenga a una retta è che le proiezioni del punto appartengano alle proiezioni omonime della retta; condizione necessaria e sufficiente perché una retta appartenga a un piano è che le tracce della retta appartengano alle tracce omonime del piano; condizione necessaria e sufficiente perché un punto appartenga a un piano è che le proiezioni del punto appartengano alle proiezioni omonime di una retta del piano. Due rette sono parallele se, e solo se le proiezioni omonime sono parallele; due piani sono paralleli se, e solo se le tracce omonime sono parallele; una retta e un piano sono paralleli se, e solo se esiste nel piano una retta parallela a quella data: nella figura 12 la retta  $r(r'_1, r')$  è parallela al piano  $\alpha$ , essendo parallela alla retta  $\bar{r}$  di  $\alpha$ .

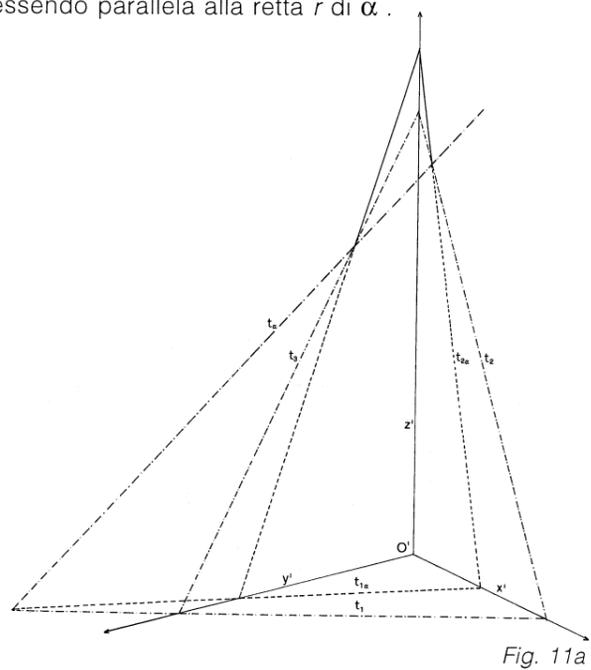


Fig. 11a

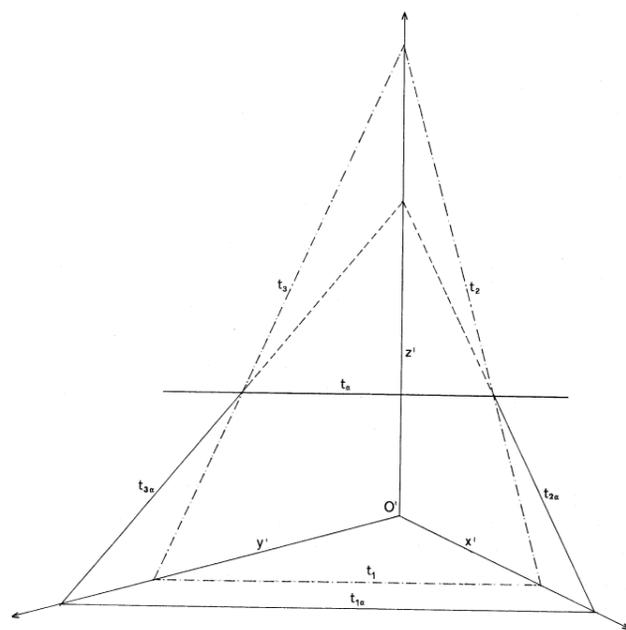


Fig. 11b

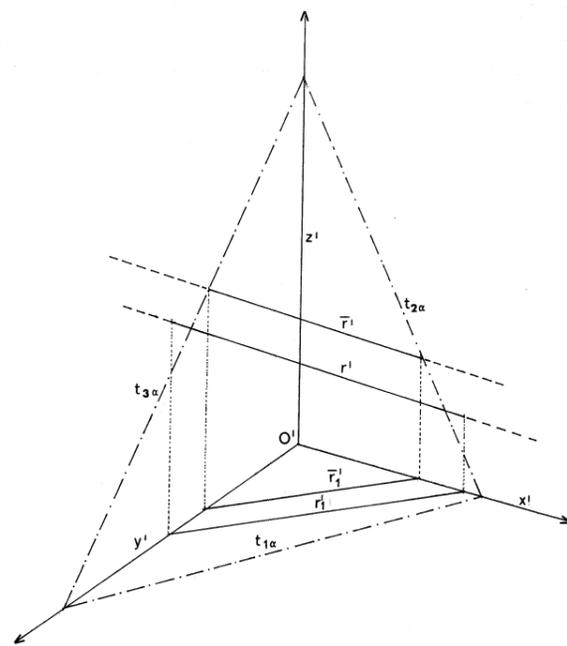


Fig. 12

### 2.3 Assonometria isometrica

1. *Il riferimento nello spazio.* Tra le assonometrie ortogonali l'assonometria isometrica fornisce immagini di maggiore efficacia visiva e di più rapida lettura interpretativa. La scelta del quadro  $\pi$  rispetto alla terna di assi cartesiani dati nello spazio prevede che gli angoli formati da ciascuno degli assi con  $\pi$  siano uguali: di conseguenza gli assi assonometrici, proiezione ortogonale su  $\pi$  dei primi, formano tra loro angoli uguali, e dunque di  $120^\circ$  ciascuno (terza parte cioè dell'angolo giro); le relative unità di misura subiscono uguali accorciamenti; infine il triangolo fondamentale è equilatero.

2. *Il riferimento sul quadro.* Data sul foglio del disegno la detta terna  $x', y', z'$  di assi assonometrici, e costruito un triangolo fondamentale, tale che ognuno dei lati sia ortogonale all'asse cui appartiene il vertice opposto, si operi il ribaltamento su  $\pi$  di due piani coordinati, ad esempio  $xy$  e  $zy$ : si verifica così che le tre unità di misura obiettive, tra loro uguali, staccate sui ribaltati  $x^*, y^*, z^*$  degli assi, si proiettino nelle relative unità assonometriche, ciascuna uguale a  $0,8/u$ , dove  $u$  è la comune unità di misura degli assi cartesiani nello spazio. A tale risultato è possibile pervenire anche ricordando che la proiezione ortogonale di un segmento, ad esempio  $O'X'$  di  $OX$ , su un piano  $\pi$  ha lunghezza uguale al prodotto della misura del segmento  $OX$  per il coseno dell'angolo che la retta cui appartiene  $OX$  forma con  $\pi$ : verificato

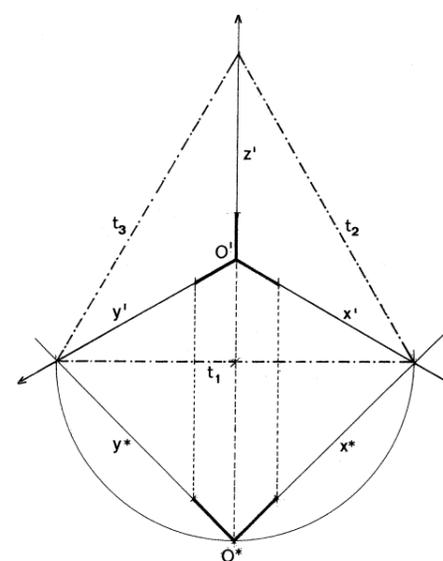


Fig. 13

che nel caso in esame ciascun asse forma con  $\pi$  un angolo di  $36^\circ 52'$ , il valore del coseno di tale angolo è appunto uguale a  $0,8$ . Nella figura 13 sono costruite - mediante il ribaltamento del piano  $xy$  - le unità di misura accorciate sui relativi assi assonometrici  $x', y'$ .

#### Esercizi

E.1. Per costruire la proiezione assonometrica di un solido geometrico, ad esempio un *parallelepipedo rettangolo*, si supponga che nello spazio la base inferiore  $ABCD$  appartenga al piano coordinato  $xy$ , e che le coppie di lati opposti siano parallele rispettivamente all'asse  $x$  e all'asse  $y$ . Dati dunque gli assi assonometrici  $x', y', z'$  come sopra descritto, e operato il ribaltamento del piano  $xy$  sul quadro, resta determinata, tra la costruenda immagine della base e la sua "vera forma", un'omologia affine ortogonale, avente per asse la retta  $t_1$ , traccia del piano coordinato  $xy$ , e punti corrispondenti  $O', O^*$  (cfr. 2.1.2.); una coppia di rette corrispondenti sono allora  $x'$  e  $x^*$  (oppure  $y'$  e  $y^*$ ), come sono corrispondenti i relativi punti impropri.

Assegnato il rettangolo  $A^*B^*C^*D^*$  con i lati paralleli ai ribaltati  $x^*$  e  $y^*$  degli omonimi assi, mediante l'omologia inversa se ne costruisca l'immagine asso-

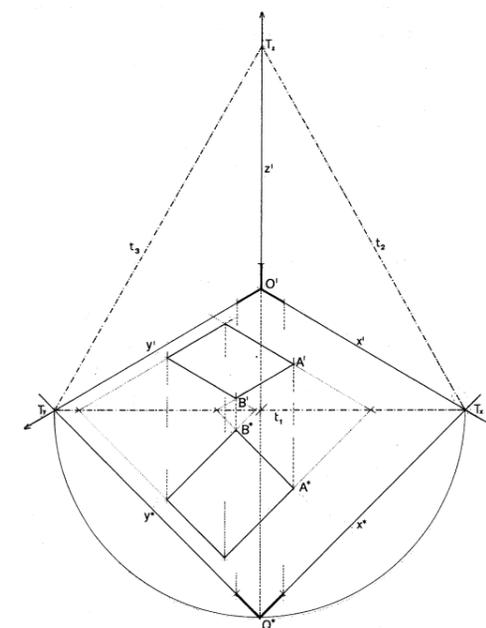


Fig. 14a

nometrica  $A'B'C'D'$  servendosi dei punti impropri di una delle coppie di rette corrispondenti  $x^*$ ,  $x'$  (o  $y^*$ ,  $y'$ ) (fig. 14a): l'uso dell'omologia consente di ottenere direttamente la riduzione delle lunghezze dei lati, evitando così di operare i relativi calcoli per il passaggio alle nuove unità di misura.

Per completare la rappresentazione del parallelepipedo, si costruisca l'immagine assonometrica di uno degli spigoli verticali di cui sia data l'altezza obiettiva: allo scopo si supponga di proiettare ortogonalmente sul piano coordinato  $xz$  la semiretta verticale  $h$  passante per il vertice  $A$  e di ribaltare il piano  $xz$  sul quadro (fig. 14b). L'immagine della proiezione ortogonale di  $h$  sul piano  $xz$  è la semiretta  $h_0$  passante

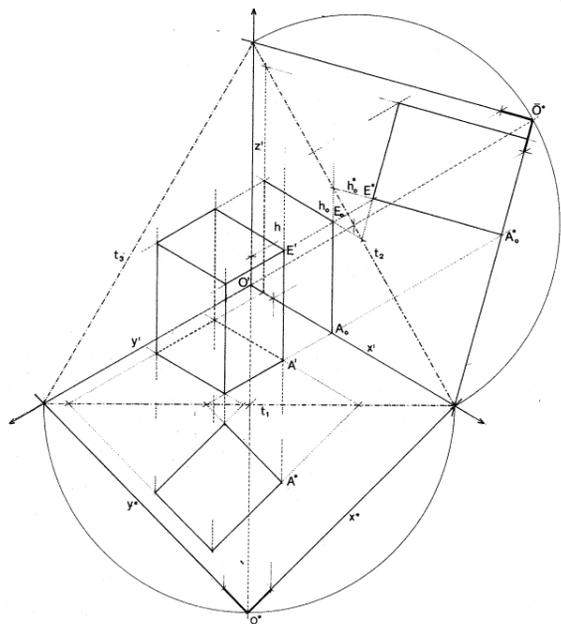


Fig. 14b

per il punto  $A_0$  – proiezione di  $A'$  su  $x'$  nella direzione di  $y'$  (essendo nello spazio  $y$  ortogonale al piano  $xz$ ) – mentre la ribaltata  $h^*$  è l'omologa di  $h_0$  nell'affinità omologica ortogonale avente per asse la retta  $t_2$  e rette corrispondenti  $x'$  e  $x^*$ . Staccata su  $h^*$  a partire da  $A^*_0$ , ribaltato di  $A_0$ , il segmento  $A^*_0E^*$  uguale all'altezza del parallelepipedo, mediante l'omologia inversa si proietti  $E^*$  in  $E_0$  e, mediante la stessa retta parallela a  $y'$ , il punto  $E_0$  su  $h'$  in  $E'$ .

L'immagine assonometrica della base superiore si costruisce poi come omologa di quella inferiore nella traslazione avente come punti corrispondenti  $A'$ ,  $E'$ : infatti le due immagini sono le proiezioni su  $\pi$  delle due basi del parallelepipedo, che nello spazio sono

figure prospettive, cioè l'una proiezione dell'altra, dalla direzione ortogonale a entrambe (S.-V., p.103).

E.2. Dato un cilindro circolare retto il cui cerchio base  $\gamma$  appartenga al piano  $xy$ , si assegni il ribaltato  $\gamma^*$  di  $\gamma$  e si costruisca il quadrato circoscritto a  $\gamma$  avente le coppie di lati opposti rispettivamente parallele ai ribaltati  $x^*$  e  $y^*$  dei relativi assi (fig. 15): l'ellisse  $\gamma'$ , omologa di  $\gamma^*$  nell'omologia inversa di ribaltamento, si determina trasformando alcuni punti del cerchio: quelli di contatto con i lati del quadrato e quelli sulle diagonali, ricordando inoltre che nell'affinità omologica il centro  $C^*$  del cerchio si trasforma nel centro  $C'_1$  dell'ellisse, mentre due diametri ortogonali dell'uno si trasformano in una coppia di diametri coniugati dell'altra (Cfr. Parte III., 2.2.1.). Staccata poi sulla semiretta verticale per  $C'_1$  (asse del cilindro) l'altezza assonometrica  $C'_1C'$ , immagine del segmento reale  $C_1C$ , e determinata come nel caso precedente – avendo ribaltato questa volta il piano  $yz$  –, si costruisca l'immagine della base superiore come trasformata dell'ellisse  $\gamma'$  nella traslazione avente come punti omologhi  $C'_1C'$ .

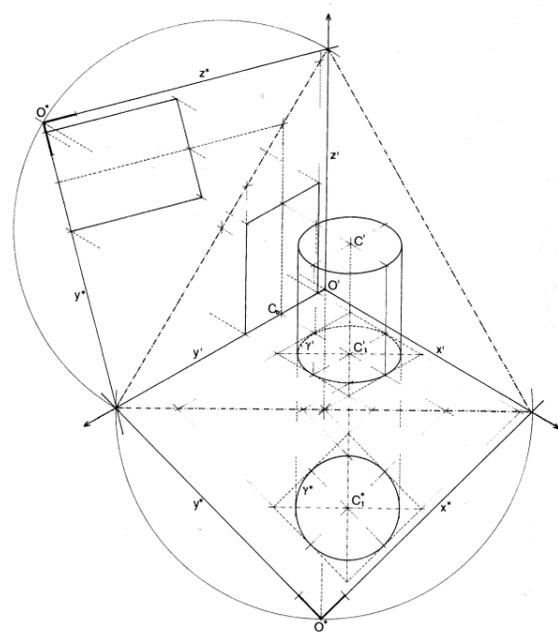


Fig. 15

### 3 Assonometria obliqua

#### 3.1 Il riferimento e il teorema di Pohlke

1. Nel caso dell'assonometria obliqua esistono evidentemente infinite possibili scelte del centro di proiezione  $R_\infty$ , escludendosi soltanto la direzione ortogonale e tutte quelle parallele al quadro. Tuttavia alcune direzioni del centro  $R_\infty$  possono comportare deformazioni delle immagini tanto vistose da non consentire l'immediata riconoscibilità dell'oggetto rappresentato, e pertanto sono da scartare.

Appare dunque opportuno, piuttosto che stabilire la direzione ottimale di  $R_\infty$ , assegnare sul quadro, cioè sul foglio del disegno, in modo appropriato caso per caso, sia gli assi assonometrici sia le relative unità di misura. Che in ogni assonometria obliqua esista una tale possibilità ci è assicurato dal teorema di Pohlke, secondo il quale una qualsiasi terna di segmenti di un piano aventi un estremo in comune e lunghezze arbitrarie, può sempre considerarsi come la proiezione da un punto improprio di tre segmenti dello spazio tra loro perpendicolari di origine comune e di uguale lunghezza: una siffatta terna di segmenti arbitrari può dunque assumersi come proiezione parallela (obliqua) sul quadro dei segmenti unitari di una terna di assi cartesiani ortogonali.

La scelta degli angoli tra gli assi assonometrici come la scelta delle relative unità di misura, potendo essere totalmente arbitrarie, dovranno tener conto esclusivamente di esigenze interpretative, soprattutto in relazione alla verosimiglianza visiva. È questo il motivo per cui non si tiene alcun conto della direzione del centro di proiezione, che tuttavia è sempre possibile ricavare dagli elementi assunti sul quadro, come vedremo nel caso dell'assonometria cavaliera (cfr. 3.2.5.),

#### 3.2 Assonometria cavaliera

1. Tra le assonometrie oblique notevole è l'assonometria cavaliera: tale assonometria prevede che il quadro  $\pi$  sia parallelo a due degli assi cartesiani e quindi a uno dei piani coordinati (fig. 16), con il quale può anche coincidere. Allora, qualunque sia la direzione del centro di proiezione  $R_\infty$ , i due corrispondenti assi assonometrici risultano paralleli (o coincidenti) con gli assi obiettivi, dunque ancora ortogonali tra loro, restando di conseguenza invariata la relativa unità di misura. Il terzo asse può risultare variamente inclinato.

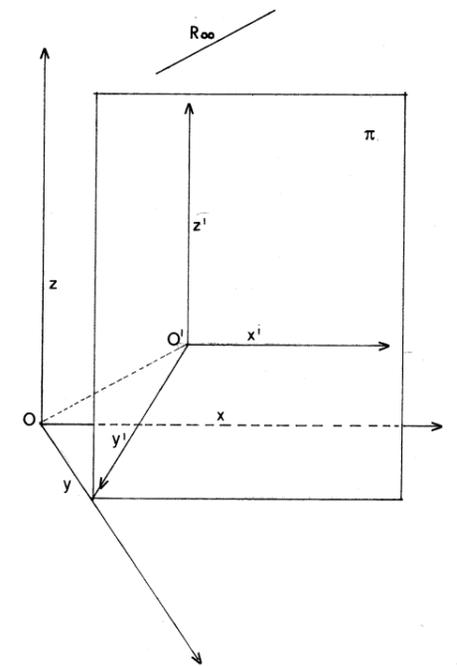


Fig. 16

2. Il riferimento nello spazio. Ricordando che l'oggetto da rappresentare in assonometria è generalmente assegnato nel metodo di Monge, la scelta più opportuna degli assi cartesiani nello spazio – in funzione di una buona verosimiglianza visiva – è quella che fa coincidere il piano coordinato  $xz$  con il quadro  $\pi$  dell'assonometria e con il secondo piano  $\pi_2$  della proiezione mongiana, e l'asse  $x$  con la linea di terra  $l$  (fig. 17): allora l'asse  $z$  è la semiretta orientata verso l'alto e perpendicolare ad  $l$  in un suo punto arbitrario  $O$ , origine degli assi, mentre l'asse  $y$  è la semiretta per  $O$  ortogonale a  $\pi_2$  e orientata verso l'osservatore.

3. Il riferimento sul quadro. La scelta della terna di assi assonometrici sul foglio del disegno prevede dunque che gli assi  $x'$  e  $z'$  coincidano con i rispettivi assi cartesiani  $x$  e  $z$ , e di conseguenza che i relativi segmenti unitari coincidano (fig. 18a). Quanto all'asse  $y'$  e alla relativa unità di misura, potendosi scegliere l'uno e l'altra in maniera arbitraria (come ci garantisce il teorema di Pohlke), per una corretta interpretazione delle immagini è opportuno che gli assi assonometrici  $y'$  e  $z'$  formino un angolo compreso tra i  $120^\circ$  e i  $150^\circ$ , e che inoltre l'unità di misura  $u_y$  sia di poco inferiore all'unità  $u$  del riferimento cartesiano:

### 3 Assonometria obliqua

#### 3.1 Il riferimento e il teorema di Pohlke

1. Nel caso dell'assonometria obliqua esistono evidentemente infinite possibili scelte del centro di proiezione  $R_\infty$ , escludendosi soltanto la direzione ortogonale e tutte quelle parallele al quadro. Tuttavia alcune direzioni del centro  $R_\infty$  possono comportare deformazioni delle immagini tanto vistose da non consentire l'immediata riconoscibilità dell'oggetto rappresentato, e pertanto sono da scartare.

Appare dunque opportuno, piuttosto che stabilire la direzione ottimale di  $R_\infty$ , assegnare sul quadro, cioè sul foglio del disegno, in modo appropriato caso per caso, sia gli assi assonometrici sia le relative unità di misura. Che in ogni assonometria obliqua esista una tale possibilità ci è assicurato dal *teorema di Pohlke*, secondo il quale *una qualsiasi terna di segmenti di un piano aventi un estremo in comune e lunghezze arbitrarie, può sempre considerarsi come la proiezione da un punto improprio di tre segmenti dello spazio tra loro perpendicolari di origine comune e di uguale lunghezza*: una siffatta terna di segmenti arbitrari può dunque assumersi come proiezione parallela (obliqua) sul quadro dei segmenti unitari di una terna di assi cartesiani ortogonali.

La scelta degli angoli tra gli assi assonometrici come la scelta delle relative unità di misura, potendo essere totalmente arbitrarie, dovranno tener conto esclusivamente di esigenze interpretative, soprattutto in relazione alla verosimiglianza visiva. È questo il motivo per cui non si tiene alcun conto della direzione del centro di proiezione, che tuttavia è sempre possibile ricavare dagli elementi assunti sul quadro, come vedremo nel caso dell'assonometria cavaliere (cfr. 3.2.5.),

#### 3.2 Assonometria cavaliere

1. Tra le assonometrie oblique notevole è l'*assonometria cavaliere*: tale assonometria prevede che il quadro  $\pi$  sia parallelo a due degli assi cartesiani e quindi a uno dei piani coordinati (fig. 16), con il quale può anche coincidere. Allora, qualunque sia la direzione del centro di proiezione  $R_\infty$ , i due corrispondenti assi assonometrici risultano paralleli (o coincidenti) con gli assi obiettivi, dunque ancora ortogonali tra loro, restando di conseguenza invariate le relative unità di misura. Il terzo asse può risultare variamente inclinato.

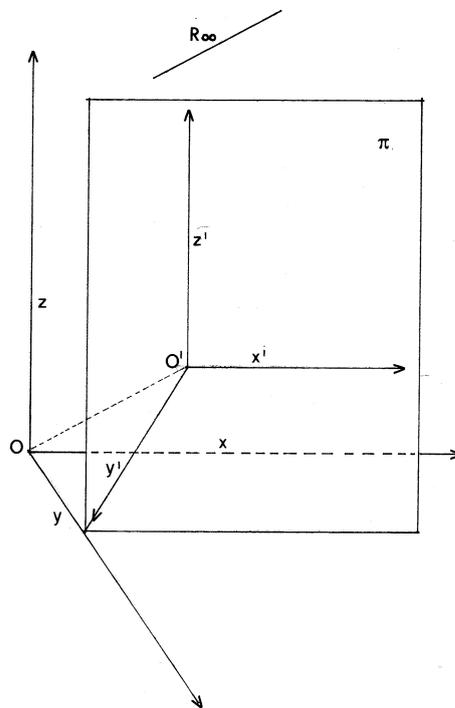


Fig. 16

2. *Il riferimento nello spazio*. Ricordando che l'oggetto da rappresentare in assonometria è generalmente assegnato nel *metodo di Monge*, la scelta più opportuna degli assi cartesiani nello spazio – in funzione di una buona verosimiglianza visiva – è quella che fa coincidere il piano coordinato  $xz$  con il quadro  $\pi$  dell'assonometria e con il secondo piano  $\pi_2$  della proiezione mongiana, e l'asse  $x$  con la linea di terra  $l$  (fig. 17): allora l'asse  $z$  è la semiretta orientata verso l'alto e perpendicolare ad  $l$  in un suo punto arbitrario  $O$ , origine degli assi, mentre l'asse  $y$  è la semiretta per  $O$  ortogonale a  $\pi_2$  e orientata verso l'osservatore.

3. *Il riferimento sul quadro*. La scelta della terna di assi assonometrici sul foglio del disegno prevede dunque che gli assi  $x'$  e  $z'$  coincidano con i rispettivi assi cartesiani  $x$  e  $z$ , e di conseguenza che i relativi segmenti unitari coincidano (fig. 18a). Quanto all'asse  $y'$  e alla relativa unità di misura, potendosi scegliere l'uno e l'altra in maniera arbitraria (come ci garantisce il *teorema di Pohlke*), per una corretta interpretazione delle immagini è opportuno che gli assi assonometrici  $y'$  e  $z'$  formino un angolo compreso tra i  $120^\circ$  e i  $150^\circ$ , e che inoltre l'unità di misura  $u_y$  sia di poco inferiore all'unità  $u$  del riferimento cartesiano:

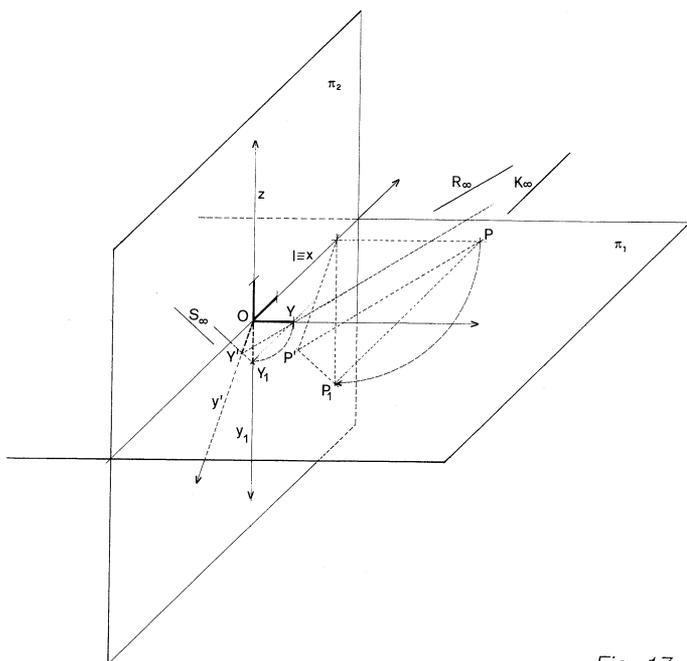


Fig. 17

questa scelta comporta la riduzione delle grandezze in profondità, con una certa analogia a quanto avviene nella visione diretta degli oggetti.

Se invece, pur restando libera la direzione dell'asse  $y'$ , anche l'unità di misura  $u_y$  dell'asse  $y'$  si lascia invariata – scelta che tuttavia solo raramente è opportuno adottare poiché i mancati accorciamenti in profondità inducono in valutazioni percettive errate –, si ha l'assonometria a  $45^\circ$ , corrispondente a una direzione di  $R_\infty$  che forma con il quadro un angolo appunto di  $45^\circ$ .

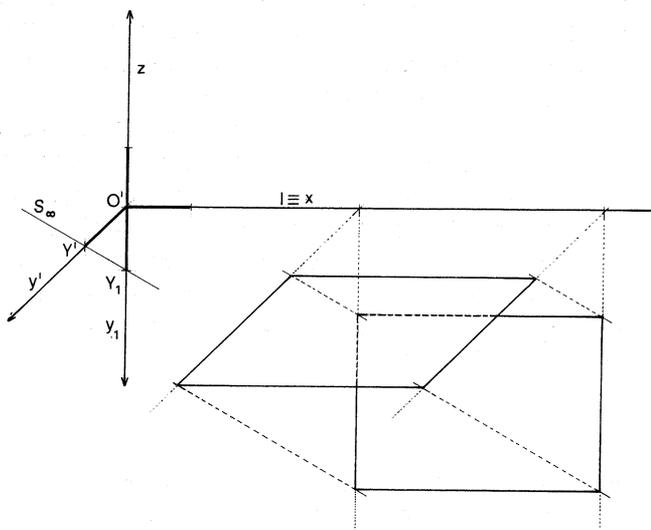


Fig. 18a

4. *Relazioni omologiche.* Per la costruzione delle immagini in una assonometria cavaliere è consigliabile un procedimento esclusivamente grafico, che, eliminando ogni calcolo per la riduzione delle misure di profondità (relative alle rette parallele all'asse  $y$ ), sia in grado di trasformare la rappresentazione mongiana di ogni oggetto nella relativa rappresentazione assonometrica.

Infatti la prima proiezione mongiana (pianta) e la prima proiezione assonometrica, con opportuna scelta del riferimento, sono legate da una *relazione di omologia*, che consente di trasformare l'una nell'altra mediante le note operazioni grafiche. L'esistenza di tale omologia è garantita dal fatto che, scelto il quadro  $\pi$  dell'assonometria coincidente con il secondo piano di proiezione  $\pi_2$  del riferimento mongiano, e ribaltato su questo il primo piano  $\pi_1$  (piuttosto che il secondo sul primo, come di consueto), la pianta ribaltata e la pianta assonometrica (deformata) sono proiezioni su  $\pi_2$  della stessa figura data in  $\pi_1$  rispettivamente dal punto improprio di direzione  $K_\infty$ , ortogonale al secondo piano bisettore, e dal centro  $R_\infty$  dell'assonometria (cfr. fig. 17). Allora l'asse dell'omologia coincide con la linea di terra  $l$ , il centro è un punto improprio, essendo impropri i centri delle due proiezioni: si tratta dunque di un'omologia affine (S.-V., p. 100)<sup>1</sup>.

In particolare i punti  $P_1$  e  $P'$  sono proiezioni sullo stesso piano  $\pi \equiv \pi_2$  di un punto  $P$  del piano orizzontale  $\pi_1$  – essendo  $P_1$  la prima proiezione mongiana (ribaltata su  $\pi_2$ ) di  $P$ , e  $P'$  la proiezione assonometrica dello stesso punto  $P$  da  $R_\infty$  –:  $P_1$  e  $P'$  sono dunque punti corrispondenti nella suddetta omologia, come sono rette corrispondenti  $y_1$  e  $y'$ , e ancora punti corrispondenti  $Y_1$  e  $Y'$ : l'omologia è allora determinata dal centro  $S_\infty$ , punto improprio della retta che congiunge  $Y_1$  e  $Y'$ , dalla stessa coppia  $Y_1, Y'$  e dall'asse  $l \equiv x$ <sup>2</sup>.

Per costruire sul foglio del disegno la rappresentazione mongiana degli assi cartesiani con le relative unità di misura (uguali tra loro) (fig. 18a), scelto sulla linea di terra  $l$  un punto  $O$ , e condotta per  $O$  la perpendicolare ad  $l$ , in questa perpendicolare coincidono l'asse  $z$  e la prima proiezione mongiana  $y_1$  (ribaltata su  $\pi_2$ ) dell'asse  $y$  – aventi tuttavia versi positivi opposti –, mentre l'asse  $x$  coincide con  $l$ .

Degli assi assonometrici  $x', z'$ , e  $y'$ , proiezioni da  $R_\infty$  degli assi cartesiani, coincidendo i primi due con i corrispondenti assi  $x$  e  $z$ , i relativi segmenti unitari restano invariati; come asse  $y'$  si scelga una semiretta inclinata opportunamente (in rapporto alla configurazione planimetrica, più o meno estesa in pro-

fondità, dell'edificio da rappresentare), e su questa si stacchi a partire da  $O$  l'unità di misura accorciata  $OY'$ , che una valutazione empirica suggerisce pari a circa  $0,8/u$ .

Talvolta è opportuna una immagine assonometrica "dal basso", che lasci cioè la pianta dell'edificio da rappresentare totalmente leggibile; questo effetto si ottiene quando la direzione  $R_\infty$  è tale che l'asse assonometrico  $y'$  formi con l'asse  $z'$  un angolo acuto invece che ottuso (fig. 18b).

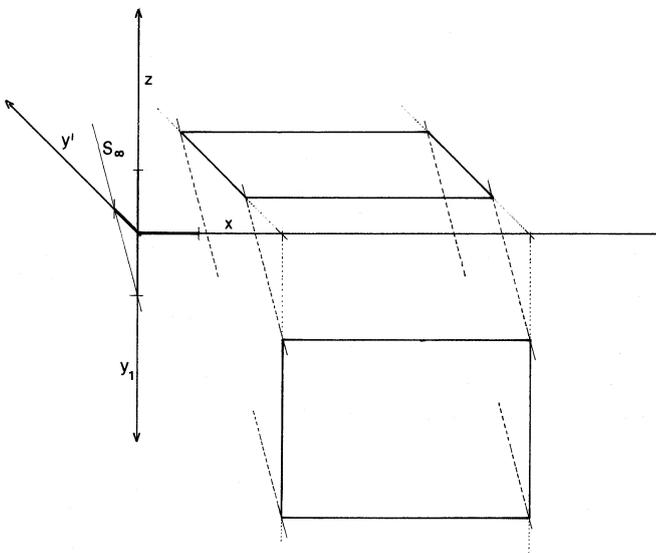


Fig. 18b

5. Come precedentemente accennato, è possibile da questi dati risalire alla direzione  $R_\infty$  del centro della proiezione assonometrica: si osservi che nella figura 17 i punti  $Y$  e  $Y'$  possono considerarsi rispettivamente prima e seconda traccia mongiana della retta  $r$  che proietta  $Y$  in  $Y'$  dal punto  $R_\infty$ . Nel foglio del disegno (fig. 19) la prima immagine mongiana  $r_1$  è quella che congiunge il punto  $S_1 \equiv Y_1$  (prima proiezione della prima traccia  $S \equiv Y$  di  $r$ ) con il punto  $T_1$  (prima proiezione della seconda traccia  $T \equiv Y'$  di  $r$ ), mentre la seconda immagine  $r_2$  è quella che congiunge il punto  $S_2 \equiv O$  (seconda proiezione della prima traccia  $S$  di  $r$ ) con  $T_2 \equiv Y'$  (seconda proiezione della seconda traccia  $T$  di  $r$ ) (S.-V., p. 194): i punti impropri  $R_{2\infty}$  ed  $R_{1\infty}$  delle rette  $r_2$  ed  $r_1$  sono la rappresentazione mongiana del centro  $R_\infty$  dell'assonometria di cui quegli assi e quelle unità di misura, precedentemente e arbitrariamente assegnati, costituiscono il riferimento sul quadro.

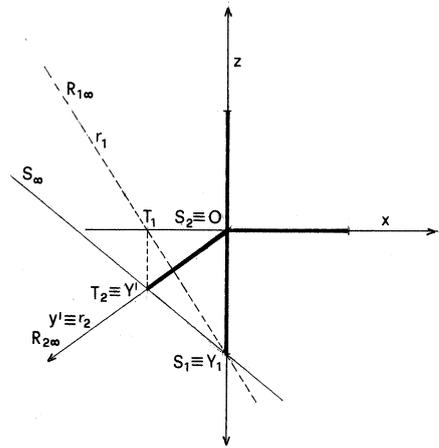


Fig. 19

6. Data dunque la terna di assi assonometrici come sopra descritto, resta individuata l'*affinità omologica* esistente tra la prima proiezione mongiana e la prima proiezione assonometrica di una figura piana appartenente a  $\pi_1$ , nella quale, come abbiamo visto, l'asse coincide con la linea di terra e con  $x$ , e il centro è il punto improprio  $S_\infty$  della retta che congiunge i punti corrispondenti  $Y_1$  e  $Y'$  (cfr. fig. 19); sono ancora coppie di elementi corrispondenti le rette  $y_1$  e  $y'$ , come sono corrispondenti i relativi punti impropri.

Osserviamo ora che le figure parallele al secondo piano  $\pi_2$  della proiezione mongiana – ad esempio due facce verticali di un parallelepipedo rettangolo come le facciate di un edificio – vengono proiettate sul quadro  $\pi$  dell'assonometria (che coincide con  $\pi_2$ ) in figure congruenti: tra le due immagini dunque, mongiana e assonometrica di ciascuna di tali facce, si stabilisce una omologia di asse e centro impropri (quest'ultimo coincidente con la direzione di  $y'$ ), dunque una *traslazione* (cfr. S.-V., pp. 103, 104), i cui punti corrispondenti sono ad esempio la seconda proiezione  $A_2$  di un vertice  $A$  della base del parallelepipedo (pianta), e l'assonometria  $A'$  dello stesso vertice (fig. 20a).

*Esercizi*

E.1. Assegnato un *parallelepipedo rettangolo* nel metodo di Monge, l'immagine assonometrica della base inferiore  $ABCD$  si costruisce come trasformata nella suddetta omologia della prima proiezione mon-

giana  $A_1B_1C_1D_1$ ; nella figura 20a le rette ortogonali alla linea di terra, e dunque parallele ad  $y_1$ , si trasformano nelle corrispondenti parallele a  $y'$ , a mezzo cioè della coppia di punti impropri (corrispondenti) delle rette  $y_1$  e  $y'$ .

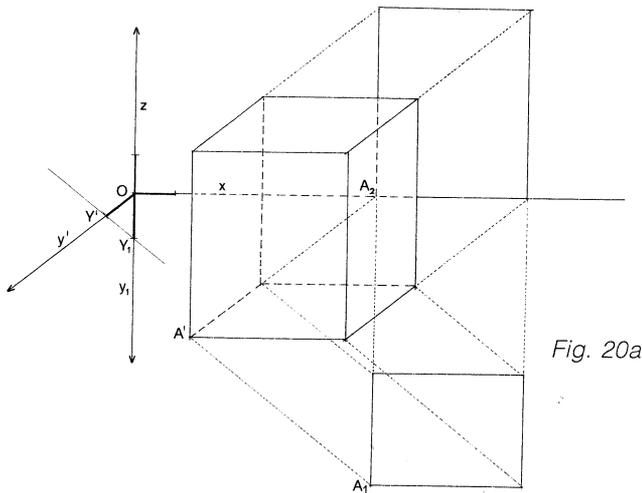


Fig. 20a

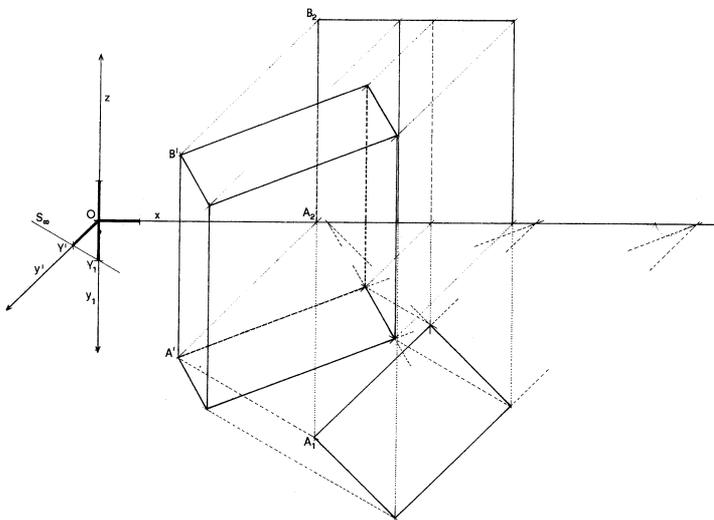


Fig. 20b

Completano l'assonometria del parallelepipedo le due traslazioni aventi come centro il punto improprio di  $y'$  e punti corrispondenti rispettivamente le coppie del tipo  $A_2, A'$  che definiscono le facce parallele al quadro: le immagini deformate delle facce laterali risultano dalla costruzione. La figura 20b rappresen-

ta invece un parallelepipedo con le facce oblique rispetto al quadro.

E.2. Data la rappresentazione mongiana di un *cilindro circolare retto* con la base sul piano  $xy$ , e data ancora la terna degli assi assonometrici  $x', y', z'$  con le relative unità di misura  $u_x = u_z = u$  e  $u_y = 0,8/u$  (fig. 21), l'ellisse  $\gamma'_1$ , trasformata del cerchio  $\gamma_1$ , ribaltato della base inferiore, si costruisce con l'ausilio di un quadrato circoscritto a  $\gamma_1$ ; gli assi e le diagonali del quadrato, in quanto coppie di diametri ortogonali del cerchio  $\gamma_1$ , si trasformano in due coppie di diametri coniugati di  $\gamma'_1$ , i punti estremi dei quali si ottengono proiettando i corrispondenti punti del cerchio secondo la direzione del centro di omologia  $S_\infty$ . L'altra ellisse, immagine della base superiore del cilindro, è l'omologa dell'ellisse  $\gamma'_1$  nella *traslazione* di punti corrispondenti  $C'_1, C_1$ , dove il punto  $C'$  stabilisce l'altezza assonometrica del cilindro.

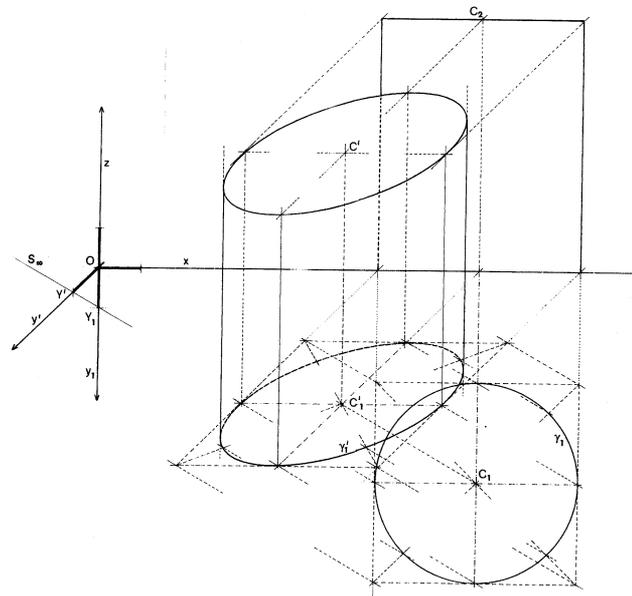


Fig. 21

Note

- 1 Per indicare le prime e le seconde proiezioni di punti e rette nel riferimento mongiano, in luogo dei consueti apici (' e ") adottiamo qui gli indici 1 e 2.