

N. B. La dimensione è un numero naturale (oppure ∞) ed è molto importante. Occorre sempre tenerne conto e imparare a calcolarla.

Oss. $\dim V =$ massimo numero di vettori linearmente indipendenti di V .

Teor. $\dim V < \infty$ e $U \subset V$ sottospazio vettoriale $\Rightarrow \dim U \leq \dim V$.
Vale uguaglianza $\Leftrightarrow U = V$.

Dim. $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base per V , $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_k)$ base per $U \Rightarrow u_1, \dots, u_k$ linearmente indipendenti $\Rightarrow \dim U = k \leq n = \dim V$.

$U = V \Rightarrow \dim U = \dim V$ (implicazione banale).

Supponiamo $\dim U = \dim V = n$ e $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n)$ base per U .
 $\forall v \in V \Rightarrow (v, u_1, \dots, u_n)$ sono $n + 1$ vettori linearmente dipendenti $\leadsto$

$$\underbrace{\beta v + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n}_{\text{coefficienti non tutti nulli}} = 0_V.$$

$\beta \neq 0$ perché $u_1, \dots, u_n$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$

$$v = -\beta^{-1}(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) \in U$$

$\Rightarrow V \subset U$ e dato che $U \subset V$ per ipotesi si ha $U = V$. □

Cor. Sia $\dim V = n$ e $v_1, \dots, v_n \in V$. Le seguenti sono equivalenti:

- (a) $(v_1, \dots, v_n)$ linearmente indipendenti;
- (b) $(v_1, \dots, v_n)$ generano V ;
- (c) $(v_1, \dots, v_n)$ base per V .

Dim. (a) $\Rightarrow$ (b) $\dim(\text{span}(v_1, \dots, v_n)) = \dim V \Rightarrow \text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$.

(b) $\Rightarrow$ (c) $(v_1, \dots, v_n)$ contiene base con n vettori $\Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$ base.

(c) $\Rightarrow$ (a) Per definizione di base. □

Oss. Questo corollario è molto importante perché permette di stabilire se $n = \dim V$ vettori formano una base: basta controllare che siano generatori o che siano linearmente indipendenti.

Esempio. Due vettori di $\mathbb{R}^2$ formano una base $\Leftrightarrow$ non sono proporzionali.