Lezione 4
Linguaggio formale

Semantica

Semantica

Lettere enunciative

- Lettere enunciative;

→ Stanno per enunciati dichiarativi.

→ Ma per la validita`, a noi interessa solo se sono veri o falsi!

- Quindi il significato di una lettera enunciativa sara` essere vero o essere falso.

  Vero e falso sono **valori di verita`**.

  {1,0} o {T, F}

- Siccome le lettere enunciative non stanno per enunciati fissi,

  E siccome per la validita` dobbiamo considerare tutte le situazioni possibili in cui un enunciato potrebbe essere vero o falso.

- Le lettere enunciative possono avere, indifferentemente, valore 1 o 0.

- Un’**interpretazione** semantica, cioe` una **valutazione** di una lettera enunciativa, e` quindi un’attribuzione di valore di verita’ a quella lettera.

- ***P e` vera in un caso*** e` equivalente a *vero in una valutazione*.

→ Simile per falso.

- In altre parole:

  v e` una funzione di valutazione dall’insieme di lettere enunciative all’insieme di valori di verita’.

  Cioe` v: At $\rightarrow$ {1,0}

- Indichiamo la valutazione v anche usando il simbolo $\models$
  In particolare,

  Se $v(A) = 1$, scriviamo $v \models_1 A$

  Se $v(A) = 0$, scriviamo $v \models_0 A$

- In generale una valutazione v e` una assegnazione di valori di verita` ad ogni lettera enunciativa.

- Cioe` v associa ad **ogni** lettera **uno ed un solo** valore tra 1 e 0.

NB:

- Abbiamo **due assunzioni** importanti e implicite:

  - che un enunciato possa essere solo **vero o falso, mai tutte e due** (v e` una <u>funzione</u>**)**

  - e che sia **definita per ogni lettera**, ovvero che ogni lettera ne abbia almeno una delle due (la funzione e` <u>totale</u>).

  – L’assunzione e` anche riflessa nell’ insieme {1,0}

- Che nessuna formula e` sia vera che falsa e’ (un’assunzione vicina a) il principio di **non contraddizione**.

  → Logiche paraconsistenti

- Che nessuna formula e` ne` vera ne` falsa e` il principio di **bivalenza**.

  → Logiche paracomplete.

Per rendere esplicite questi vincoli imposti sulla valutazione v, possiamo dire che:

- Una valutazione v e` **completa** sse

  per ogni fbf A di L, v $|=_1$ A oppure v $|=_0$ A .

- Una valutazione v e` **consistente** sse

  per nessuna fbf A di L, v $|=_1$ A e v $|=_0$ A.

- Si potrebbe pensare che questa e’ una limitazione e quindi ammettere **vero-e-falso** o **ne’ vero ne` falso**, come altri valori di verita`.

  E magari anche altri.

- In altre parole, e’ ragionevole assumere consistenza e completezza della valutazione?

  - Consente semplicita’

  - Sembra ragionevole in matematica.

  (Cambiare questo vuol cambiare la matematica! Si ha una matematica non classica)

- Vi sono moltissimi studi logici su queste alternative:

  logiche non classiche, logiche a piu` valori.

Operatori logici

- Il significato degli operatori logici e` dato precisando in che modo ciascun operatore contribuisce alla verità o alla falsità delle fbf in cui compare.

Tavole di Verita`

- I connettivi logici sono **vero-funzionali**,

  ovvero la loro semantica e` data da funzioni che hanno come argomento i valori di verita` delle immediate sottoformule, e come valore un valore di verita`.

- Quindi la loro semantica si potrebbe esprimere di nuovo in termini di funzioni.

- Gli operatori, sappiamo, possono essere unari (-)

  o binari (v,&, →, ↔).

- Se sono binari la loro funzione di valutazione ha 2 argomenti

  (oppure un argomento dato dalla coppia ordinata (che e` **un** argomento), dato dai valori delle immediate sottoformule).

  → L'ordine conta solo per →, non per per v, &, dove l'ordine dei valori di verita` non fa differenza.

- Estensione della funzione v a v*.

  v e` definita solo su At.

  v* e` definita su tutto L. (cioe’ su tutte le fbf di L).

  $v^*: L \rightarrow \{0,1\}$

- v* puo’ essere definita estendendo v per **ricorsione.**

- La semantica di ogni connettivo (ovvero la funzione di valutazione semantica associata ad ogni connettivo)

puo’ essere data come tavola di verita`.

Negazione

(Commento sulle tavola di verita`)

ϕ	$\sim\phi$
V	F
F	V

- O anche:

- se $v \models_1 A$, allora $v \models_0 -A$
- se $V \models_0 A$, allora $v \models_1 -A$

Congiunzione

ϕ	ψ	$\phi \,\&\, \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- $v \models_1 A \& B$ sse $v \models_1 A$ e $v \models_1 B$
- $v \models_0 A \& B$ sse $v \models_0 A$ oppure $v \models_0 B$

Disgiunzione

- Possiamo distinguere due tipi di disgiunzione:

  inclusiva (vel)

  “*puo’ partecipare chi ha una laurea in fisica o in chimica.*”

  esclusiva (aut)

  “per 5 euro, si puo’ ordinare un primo o un secondo”

Disgiunzione (inclusiva)

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$v \models_1 A \vee B$ sse $v \models_1 A$ oppure $v \models_1 B$

$v \models_0 A \vee B$ sse $v \models_0 A$ e $v \models_0 B$

Disgiunzione (esclusiva) (ridondante)

ϕ	ψ	$\phi \vee^{e} \psi$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$$(M \vee P) \,\&\, {\sim}(M \,\&\, P)$$

Condizionale

Nella lingua naturale ci sono molti tipi di condizionale.

In logica classica si usa un condizionale chiamato **condizionale materiale**.

Da` l'idea per cui l'*antecedente* fornisce una condizione **sufficiente**, ma **non necessaria** per il *conseguente*.

- Provate a dare voi la tavola di verita`.

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- $v \models_1 A \rightarrow B$ sse $v \models_0 A$ oppure $v \models_1 B$
- $v \models_0 A \rightarrow B$ sse $v \models_1 A$ e $v \models_0 B$

- Nota che **un condizionale materiale risulta vero ogni qualvolta il suo antecedente è falso**,

- Così come risulta **vero ogni qualvolta è vero il suo conseguente**.

- Cioe` $A \rightarrow B$ e` vero:

  se A e` falso o se B e` vero.

- Questo ha esiti strani.

  I paradossi del condizionale materiale.

  Se 2=2=5, allora la luna e` fatta di formaggio.

  Se la luna e’ fatta di formaggio, allora 2+2=4.

  (Nota questi sono esempi “non” logici, ma basta usare tautologie e contraddizioni. Che introdurremo piu` avanti)

  (Per accettare questi paradossi e` utile avere in mente la matematica)

Bicondizionale

ϕ	ψ	$\phi \leftrightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- Il bicondizionale non e` necessario. Si puo’ esprimere con congiunzione e disgiunzione (simile alla disgiunzione esclusiva).

→ Noi per lo piu` lo tratteremo cosi’.

- Anzi, e` sufficiente avere la negazione e uno dei connettivi binari per esprimere tutte le possibili funzioni di verita’!

- E` possibile anche ridurre tutto ad un connettivo unico.

  Ad esempio lo Sheffer stroke (non entrambe, nand).

- O anche il suo duale (Nor).

- Questo indica una proprieta’ importante dei nostri connettivi:

  ne abbiamo abbastanza per esprimere tutte le funzioni di verita`. Tutte le combinazioni possibili.

- Cioe` il nostro linguaggio logico e` espressivamente adeguato.

- La lista di connettivi e` **completa**. , nel senso che e` in grado di caratterizzare qualsiasi ttavola di verita`.

  (Post completezza. Completezza vero-funzionale.)

Tavole di verita` per formule

- Abbiamo visto le tavole per connettivi (danno la semantica).

- Tramite esse possiamo avere tavole per formule, che ci consentono una valutazione semantica di formule qualsiasi.

- Per costruire la tavola di una fbf qualsivoglia,

  si trovano innanzitutto i valori di verità delle sue sottoformule più piccole,

  e poi si usano le tavole degli operatori logici allo scopo di calcolare i valori delle sottoformule di dimensioni di volta in volta maggiori,

  fino a ottenere i valori dell'intera formula.

- Esempio:

(M v P) & -(M &P)

(identificare sottoformule in ordine di complessita` e l’operatore principale. Ovviamente, le sottoformule piu` piccole sono le lettere, M e P)

- Siccome vogliao considerare tutti i casi (nella definzione di validita` logica si parla di tutti i casi), dobbaimo considerare tutte le combinazioni possib ili di valori di verita` di M e P.

- Tali combinazioni le scriviamo a destra e sono 4.

M	P	$(M \vee$	$P)$	&	~	$(M$	&	$P)$
V	V	V	V			V		V
V	F	V	F			V		F
F	V	F	V			F		V
F	F	F	F			F		F

- Poi applicando le tavole di verita`, seguendo la costruzione delle sottoformule, computiamo i valori di tali sottoformule.

M	P	$(M$	$\vee$	$P)$	$\&$	$\sim$	$(M$	$\&$	$P)$
V	V	V	V	V			V	V	V
V	F	V	V	F			V	F	F
F	V	F	V	V			F	F	V
F	F	F	F	F			F	F	F

M	P	$(M$	$\vee$	$P)$	$\&$	$\sim$	$(M$	$\&$	$P)$
V	V	V	V	V		F	V	V	V
V	F	V	V	F		V	V	F	F
F	V	F	V	V		V	F	F	V
F	F	F	F	F		V	F	F	F

M	P	$(M$	$\vee$	$P)$	$\&$	$\sim$	$(M$	$\&$	$P)$
V	V	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	V	F	F	V
F	F	F	F	F	F	V	F	F	F

- La colonna di ciascuna sottoformula va sempre scritta sotto il suo operatore principale.

- Alla fine si evidenzia la colonna sotto l'**operatore principale** dell'intera fbf.

- Si noti che Il numero di righe in una tavola di verità è determinato dal numero delle lettere enunciative.

    (Muovendosi verso sinistra, si raddoppia l'intervallo di alternanza)

P	Q	R	
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

- Esercizi.

  Esercizio 8, pag.28; es.10 pag. 36.

Nozioni semantiche

Tautologie e altro

- Sia dia il valore di:

P v -P

P → P

P & -P

- 3 casi sono possibili:

  1. Una fbf e` vera in ogni caso (in ogni riga. Per ogni valutazione delle atomiche).

  Tautologie

  (Sempre molecolari!)

  → Verita’ stabilite solo in virtu’ della logica!

2. Una fbf e` sempre falsa.

Contraddizione.

(Sempre molecolari!)

(A volte si introducono constanti logiche atomiche a valore fisso, **vero** e **assurdo**, o **top** e **bottom**)

3. Una fbf assume a volte il valore vero, a volte il valore falso.

Contingenza.

(Sia atomiche che molecolari).

Df. tautologia una fbf molecolare ϕ di $\mathcal{L}$ t.c. qualunque sia la valutazione v assegnata alle parti atomiche delle fbf ϕ, ϕ avrà sempre $v \models_1 \phi$.

Df. contraddizione di $\mathcal{L}$ è una fbf molecolare ϕ di $\mathcal{L}$ t.c. qualunque sia la valutazione v assegnata alle parti atomiche di ϕ, ϕ avrà sempre $v \models_0 \phi$.

Df. contingenza è fbf molecolare di $\mathcal{L}$ che non è né una tautologia né una contraddizione.

- Nota:

  ad essere precisi queste sono tautologie (contraddizioni, contingenze) **vero-funzionali**.

  Ve ne sono altre non vero-funzionali.

  (ad es. *nessuno scapolo e` sposato*).

Fine semantica