Lezione 5

Conseguenza logica

- Le tavole di verita` possono essere usate anche per determinare la conseguenza logica (validita` logica).

- Diciamo che B e` conseguenza logica di un insieme di premesse {A1,…,An}, se in ogni caso in cui le premesse sono tutte vere, anche B e` vera, in virtu` della forma logica.

→ Questa e’ la caratterizzazione che abbiamo gia` dato di validita` logica.

Ora pero` possiamo precisarla, con una chiara nozione di caso.

(Non piu’ immaginazione)

Esempio,

Oggi e` lunedi’ o oggi e` martedi`,
non si da il caso che oggi e` lunedi,

Quindi, oggi e` martedi`.

$(P \vee R)$, $-P$ $\vdash R$

(Sillogismo disgiuntivo)

P	R	P	$\vee$	R,	$\sim P$	$\vdash$	R
V	V	V	V	V	F		V
V	F	V	V	F	F		F
F	V	F	V	V	V		V
F	F	F	F	F	V		F

- Commento (ogni riga rappresenta un caso possibile, ...).

- La tavola dimostra che ogni argomentazione di questa forma è valida.

Se Dio esiste allora non esiste. Quindi esiste

Dio esiste $= A$

	A	$\rightarrow$	$\neg A$	$+\ A$	A
	1	0	0	1	1
$\Longrightarrow$	0	1	1	0	0

Se Dio esiste allora non esiste. Quindi non esiste

	$(A \rightarrow \neg A)$	$+\ \neg A$	A
	0	0	1
$\Longrightarrow$	1	1	0

- Alcune non sono valide, perche`, almeno in alcuni casi, portano da premesse vere a conclusione falsa.

- Fallacia.

- Se una forma argomentativa e` invalida ha **controesempi**.

  (Casi in cui le premesse sono vere, ma la conclusione` falsa).

- Se piove, mi bagno. Mi bagno. **Quindi** piove.

  $P \rightarrow Q, Q \vdash P$

  → Affermazione del conseguente.

P	Q	P	$\rightarrow$	$Q,$	Q	$\vdash$	P	
V	V	V	V	V	V		V	
V	F	V	F	F	F		V	
F	V	F	V	V	V		F	×
F	F	F	V	F	F		F	

- Se piove, mi bagno. Non piove. Quindi non mi bagno.

$P \rightarrow Q, -P \mid\!- -Q$

→ Negazione dell’antecedente.

- Le Fallacie sono simili a forme argomentative corrette (Modus ponens e modus tollens).

- Ma sono scorrette.

- Modus ponens $P \rightarrow Q, P \vdash Q$

- Modus tollens $P \rightarrow Q, -Q \vdash -P$

- Abbiamo una caratterizzazione precisa e formale della validita’ logica. (conseguenza logica).

- Sappiamo a che condizioni un argomento e` valido, e abbiamo un metodo (le tavole di verita’) per determinarlo).

- Per indicare che una conclusione B e` conseguenza logica di un insieme di premesse, {A1, …, An} usiamo il simbolo:

  $\models$

  (senza indicazione di v e senza indici 0,1)

  E scriviamo:

  $\{A1, \ldots, An\} \models B$

- Vuol dire:

  non esiste una valutazione v, per cui

  $v \models_1 A_1$, … , $v \models_1 A_{n,}$ e $v \models_0 B$.

- Quella sopra ci fornisce anche una definizione rigorosa di validita` logica.

  Dove i casi (“*in tutti i casi…”*) si sono trasformati nelle valutazioni v,

  e la forma logica (“*in virtu` della forma logica*”) e` implicita in come le valutazioni v sono costruite.

  (Ovvero si tiene fisso il significato dei connettivi – dato con precise tavole di verita`- e si varia quello delle lettere enunciative)

- NOTA:

  Una **tautologia** A e` una conseguenza logica dall'**insieme vuoto di premesse**.

  $\models A$

- Nota

  “|= “si usa quando si ha a che fare con le valutazioni, con 1,0, con le tavole di verita`. Cioe’ con la semantica (tavole di verita’ eccetera).

  “|-” si usa (usera`) quando si e` al livello “sintattico” dell’argomento.

  (si ragiona senza considerare esplicitamente i valori di verita`)

Equivalenza logica

e

Algebra della logica

- Con la nozione di conseguenza logica, possiamo definire quella di **equivalenza logica**.

- A e B sono logicamente equivalenti, se hanno sempre le stesse valutazioni (per ragioni di sola logica).

- Ovvero, A e B sono logicamente equivalenti sse

  $A \models B$ e $B \models A$

  ($A \mathrel{=}\!\mid\mid\!\mathrel{=} B$)

  Che e’ anche equivalente a:

  $\models (A \leftrightarrow B)$

- Esempio:

  Doppia negazione:

  A =||= - - A

$A \equiv \neg\neg A$

A	$\neg\neg A$
1	1
0	0

- L’equivalenza logica ci permette di stabilire alcune proprieta` dei connettivi.

Congiunzione:

- Commutativita`

(P&Q) =||= (Q&P)

- Associativita`

  (P & Q) & R =||= P & (Q & R)

- Idempotenza

  (P & P) =||= P

Disgiunzione:

- Commutativita`: (PvQ) =||= (QvP)

- Associativita`: (PvQ) v R =||= P v (Q v R)

- Idempotenza: (PvP) =||= P

- Interazioni tra connettivi.

Congiunzione e disgiunzione:

De Morgan:

- (P&Q) =||= (-P v -Q)

(P&Q) =||= - (-P v -Q)

- **De Morgan**

$-(P \vee Q) =||= (-P \& -Q)$

$(P \vee Q) =||= -(-P \& -Q)$

- **Distributivita`:**

  P & (Q v R) =||= (P&Q) v (P&R)

  P v (Q & R) =||= (PvQ) & (PvR)

Congiunto tautologico $(A \land (B \lor \neg B)) \equiv A$

disgiunto tautologico $(A \lor (B \lor \neg B)) \equiv$

$(B \lor \neg B)$

congiunto contraddittorio

$(A \land (B \land \neg B)) \equiv$

$(B \land \neg B)$

disgiunto contraddittorio

$(A \lor (B \land \neg B)) \equiv A$

- Le proprieta` introdotte possono essere usate per dimostrare equivalenze.

$$(A \land (\neg\neg A \lor A)) \equiv A$$

1)	$(A \land (\neg\neg A \lor A))$	dato
2)	$(A \land (A \lor A))$	1, doppia negazione
3)	$(A \land A)$	2, idempotenza $\lor$
4)	A	3, idempotenza $\land$

- **Condizionale**

  Per il condizionale, idempotenza, associativita` e commutativita` **non** valgono.

idempotenza $\underbrace{\underset{0}{A} \to \underset{0}{A}}_{1} \not\equiv \underset{0}{A}$?

commutatività $(\underbrace{\underset{1}{A} \to \underset{0}{B}}_{0}) \not\equiv (\underbrace{\underset{0}{B} \to \underset{1}{A}}_{1})$

associatività

$$\underbrace{(\underbrace{\underset{0}{A} \to \underset{1}{B}}_{1}) \to \underset{0}{C}}_{0} \not\equiv \underbrace{(\underset{0}{A} \to \underbrace{(\underset{1}{B} \to \underset{0}{C})}_{0})}_{1}$$

- Alcune equivalenze:

$$A \rightarrow B =||= -A \vee B$$

$$-A \rightarrow B =||= A \vee B$$

$$A \rightarrow B =||= -(A \& -B)$$

$$-(A \rightarrow B) =||= (A \& -B)$$

- **Sostitutivita`:**

  Siano A,B,C,D fbf tali che: A =||= B ,

  D risulta da C, sostituendo delle occorrenze di A con B.

  Allora

  D =||= C

  (cioe` hai C (e basta) in cui occorre A,

  e sostituisci B ad A dentro C (dove A e B sono equivalenti) allora ottieni una nuova formula D, che e` equivalente a C)

  (esempio)

- Si puo’ dimostrare che se A e` una **tautologia**, in cui occorre una **lettera enunciativa S**,

  e B risulta da A per sostituzione (*totale e uniforme*) di **S con una fbf F,** anche B e’ una **tautologia**.

  → Si puo` generalizzare a un insieme finito di lettere enunciative (S1… Sn)

- Si puo` generalizzare alla consequenza logica.

(La tautologia e` solo un caso limite a 0 premesse)

- NOTA:
  Questo e` il motivo per cui quando analizziamo un argomento consideriamo la forma piu` analizzata.

  Perche` se la validita` e` raggiunta ad una certa profondita`, non viene piu` persa.

  (L’argomento rimane valido, e la tautologia rimane tale)