Matrici

Spazio delle colonne e delle righe. $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow$

$$\operatorname{span}(A_{(1)}, \dots, A_{(n)}) \subset \mathbb{K}^m \quad \textit{spazio delle colonne di } A.$$
$$\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) \subset \mathbb{K}^n \quad \textit{spazio delle righe di } A.$$

Rango come dimensione. $\operatorname{rg} A = \dim\big(\operatorname{span}(A_{(1)}, \dots, A_{(n)})\big)$ (colonne).
Si può anche dimostrare che $\operatorname{rg} A = \dim\big(\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)})\big)$ (righe).

Calcoli con le basi

Data una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ per V e dati $u_1 \dots, u_k \in V$ possiamo determinare una base di

$$U = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_k) \subset V$$

considerando la matrice $A \in M_{n,k}(\mathbb{K})$ avente per colonne le coordinate dei vettori $u_1, \dots, u_k$ rispetto a $\mathcal{B}$. Mediante l'algoritmo di Gauss trasformiamo A in A' a gradini. Si ha:

$$\dim U = \text{numero dei pivot}.$$

Una base di U è data da quei generatori $u_1, \dots, u_k$ corrispondenti alle colonne dei pivot (potrebbero essere tutti o solo alcuni).

N. B. I vettori di $\mathbb{K}^n$ sono le n-uple ordinate di elementi di $\mathbb{K}$. Queste sono anche le coordinate rispetto alla base canonica, che spesso usiamo implicitamente. Su $\mathbb{K}^n$ esistono infinite basi per $n \geqslant 1$.

Esempio. Determinare base e dimensione di $U = \operatorname{span}(u_1, u_2, u_3, u_4) \subset \mathbb{R}^4$, dove

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 pivot nelle colonne $1, 2, 4 \Rightarrow \dim U = 3$ e (u_1, u_2, u_4) base per U.

Equazione vettoriale. Dato un sottospazio vettoriale $U \subset V$, scegliamo una base una base $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_k)$ per $U \Rightarrow U = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_k)$. Ogni vettore $v \in U$ è combinazione lineare unica di $u_1, \dots, u_k$ e possiamo scrivere

$$U: \ v = t_1 u_1 + \cdots + t_k u_k.$$

Questa si chiama *equazione vettoriale* di U. I coefficienti $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$ prendono il nome di *parametri* e variano in tutti i modi possibili.

Equazioni parametriche. Scegliamo una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ per V.

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \quad u_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}^{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i, \quad j = 1, \dots, k.$$

Poniamo anche

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

L'equazione vettoriale di U si scrive come

$$U: \ X = t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k$$

da cui si ottengono le *equazioni parametriche* di U

$$U: \begin{cases} x_1 = a_{11} t_1 + \cdots + a_{1k} t_k \\ \vdots \\ x_n = a_{n1} t_1 + \cdots + a_{nk} t_k. \end{cases}$$

Equazioni cartesiane. Nelle equazioni parametriche possiamo eliminare i parametri $t_1, \dots, t_k$. Otteniamo le *equazioni cartesiane* di U

$$U: \begin{cases} c_{11} x_1 + \cdots + c_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ c_{m1} x_1 + \cdots + c_{mn} x_n = 0. \end{cases}$$

ossia un sistema omogeneo il cui spazio delle soluzioni rappresenta U:
$u \in U \Leftrightarrow$ il vettore delle coordinate di u è soluzione del sistema.

Il passaggio da equazioni cartesiane a equazioni parametriche si fa risolvendo il sistema e determinando la soluzione generale, che esprime le equazioni parametriche.

Esempio. Riprendiamo l'esempio precedente, $U = \mathrm{span}(u_1, u_2, u_4) \subset \mathbb{R}^4$.

$$U:\ X = t_1u_1 + t_2u_2 + t_3u_4 \qquad \text{equazione vettoriale}$$

$$U:\ \begin{cases} x_1 = t_1 - t_2 \\ x_2 = 2t_1 + t_3 \\ x_3 = -t_1 + 2t_2 + t_3 \\ x_4 = t_1 + 2t_2 \end{cases} \qquad \text{equazioni parametriche}$$

Per trovare le equazioni cartesiane risolviamo il sistema col metodo di Gauss, trattando i parametri t_i come incognite e le x_i come termini noti. Ricaveremo le equazioni cartesiane come condizioni di compatibilità.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 2 & 0 & 1 & x_2 \\ -1 & 2 & 1 & x_3 \\ 1 & 2 & 0 & x_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & 1 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 + x_3 \\ 0 & 3 & 0 & -x_1 + x_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 + x_3 \\ 0 & 2 & 1 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 3 & 0 & -x_1 + x_4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & -1 & -4x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 0 & 0 & -3 & -4x_1 - 3x_3 + x_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & -1 & -4x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 \end{array}\right)$$

da cui si ricava l'equazione cartesiana

$$U:\ 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0.$$

Esempio. $W \subset \mathbb{R}^4$ sottospazio vettoriale di equazioni cartesiane

$$W:\ \begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} .$$

Determiniamo equazioni parametriche, una base e la dimensione di W.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$W:\ \begin{cases} x_1 = 2t_1 - t_2 \\ x_2 = -3t_1 + t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I vettori (w_1, w_2) sono base per W, ricavabile dai coefficienti dei parametri o anche assegnando ai parametri (t_1, t_2) i valori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ risp.
La dimensione coincide dunque col numero dei parametri liberi: $\dim U = 2$.