Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame 17.6.08, prima prova d'esame.

1) (6 punti) Studiare il grafico di

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}.$$

2) (2 punti) Enunciare il principio di induzione.

3) (4 punti) Enunciare il teorema di Weierstrass ed il teorema degli zeri per funzioni continue.

4) (12 punti, 3 ciascuno) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

(a) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x(\arctan x - \pi) + x + 1}{x^2 \tan(\frac{1}{x}) + 3x + 1}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}}$$

(c) $$\lim_{n\to +\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

(d) $$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)$$

5) (6 punti) Stabilire dove la seguente funzione $f(x)$ e' continua e dove non lo é. Stabilire dove é differenziabile, calcolandone la derivata, e dove non lo é.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{per } x < 0 \\ x^4 - x^2 & \text{per } 0 \le x \le 1 \\ \frac{\tan\left((x-1)^2\right)}{x-1} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

ANALISI Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame del 18.6.08. Argomentare le risposte

1) (15 punti, 3 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \qquad \int x^5 \sin(x^2)\, dx$$

$$(b) \qquad \int_0^1 \arctan(x) dx$$

$$(c) \qquad \int \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$$

$$(d) \qquad \int (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

$$(e) \qquad \int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

2) (6 punti, 2 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di questi integrali e serie sono convergenti.

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log^2(1 + n^{-1})$$

$$(b) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-12(\sqrt{x^3+x+1}+x^2)} dx$$

$$(c) \qquad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \arctan(n)$$

3) (3 punti) Enunciare le formule del resto o di Peano e di Lagrange per i polinomi di Taylor.

4) (3 punti) Enunciare i teoremi fondamentali del calcolo.

5) (3 punti) Enunciare il criterio il criterio di Leibnitz per serie alternanti.

ANALISI Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame del 9.1.08. Argomentare le risposte

1) (6 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita, convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}.$$

2) (3 punti) Enunciare e dimostrare la regola del prodotto (detta anche regola di Leibniz) per la derivata.

3) (12 punti, 3 ciascuno) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\tanh\left(x^{\frac{1}{10}}\right)\right)+3}{x^4\sin(\log(1+x^{-4}))+2}$$

(b) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2n}}{(3n)!}$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$$

(d) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\tan(x^{-2}+x^{-3})+x\tanh x+\sqrt{x^2+1}}{3x+x(\pi-\arctan(x^2))+1}$$

4) (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema dell'esistenza del limite per successioni monotone.

5) (6 punti) Stabilire dove la seguente funzione $f(x)$ e' continua e dove non lo é, dove é differenziabile. Calcolare il valore della derivata dove é differenziabile e dimostrare la non differenziabilitá laddove non é differenziabile.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}} & \text{per } x > 0 \\ 1 & \text{per } -1 \le x \le 0 \\ (x+1)\sin\left((x+1)^{-1}\right) & \text{per } x < -1 \end{cases}$$

ANALISI Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame del 11.1.08. Argomentare le risposte

1) (15 punti, 3 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

(a) $$\int \frac{e^{2x}+e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$$

(b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)dx$$

(c) $$\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

(d) $$\int x\arctan(x)dx$$

(e) $$\int \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

2) (6 punti, 2 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di questi integrali e serie sono convergenti.

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\log(1+n^{-1})+\arctan(n)+2}{n\sin\left(n^{-3}+n^{-2}+n^{-1}\right)+n^5(1-\tanh(n))+2}$$

(b) $$\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$

(c) $$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{n^3\tan(n^{-\frac{1}{2}}+n^{-2})+1}$$

3) (3 punti) Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 di $\log(1+x)$ in $x_0=0$

4) (3 punti) Enunciare le formule del resto o di Peano e di Lagrange per i polinomi di Taylor.

5) (3 punti) Enunciare il criterio di Leibniz per serie alternanti.

ANALISI Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame del 9.9.08. Argomentare le risposte

1) (6 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita, convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = (x+1)e^{-x}.$$

2) (18 punti, 3 ciascuno) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-1} - 2\right)$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\tanh\left(x^{\frac{1}{10}}\right)\right)+3}{x^4\sin(\log(1+x^{-4}))+2}$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin x}\right]$$

(d) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\tan(x^{-2}+x^{-3}) + x\tanh x + \sqrt{x^2+1}}{3x + x(\pi - \arctan(x^2)) + 1}$$

(e) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n\,(n!)}$$

(f) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2\sin(1/x)+x+1}{x\arctan(x)+x+1}$$

3) (6 punti) Stabilire dove la seguente funzione $f(x)$ e' continua e dove non lo é. Stabilire dove é differenziabile, calcolandone la derivata, e dove non lo é.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x \le 0 \end{cases}$$

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 10.9.08. Argomentare le risposte.

1) (15 punti, 3 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

(a) $$\int x \cos x \sin x \, dx$$

(b) $$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

(c) $$\int \frac{x}{(x-1)(x-2)} dx$$

(d) $$\int \frac{x}{(x-1)^2} dx$$

(e) $$\int x \arctan x dx$$

2) (9 punti, 3 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri quali di questi integrali e serie sono convergenti

(a) $$\int_1^{+\infty} \frac{1+x^3}{1+x^4+x^6 e^{-x}} dx$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n+1)}$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

3) (3 punti) Calcolare la serie di Taylor in 0 di

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

5) (3 punti) Enunciare il secondo ed il primo teorema fondamentale del calcolo. Non dare dimostrazioni.

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame 9.7.08, prima prova d'esame.

1) (6 punti) Studiare il grafico di

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^3}.$$

2) (3 punti) Utilizzare il principio di separazione sulla retta reale per dimostrare che ogni sottoinsieme della retta reale estesa $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ ammette un estremo superiore.

3) (3 punti) Dimostrare che se $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ & $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

4) (9 punti, 3 ciascuno) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

(a) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin(1/x) + x + 1}{x^2\tan(x) + x + 1}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}\right)$$

(c) $$\lim_{n\to +\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$$

5) (6 punti) Stabilire dove la seguente funzione $f(x)$ e' continua e dove non lo é. Stabilire dove é differenziabile, calcolandone la derivata, e dove non lo é.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} + 1 & \text{per } x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{per } 0 \le x \le 1 \\ \frac{\sin^2\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{x-1} + 1 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

6) (3 punti) Trovare massimi e minimi assoluti di $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ in $[0,1]$.

ANALISI Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame del 10.7.08. Argomentare le risposte

1) (15 punti, 3 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \qquad \int x^2 \sin(x)\, dx$$

$$(b) \qquad \int_0^1 \log(x) dx$$

$$(c) \qquad \int \frac{x^2+1}{x^3+x^2-x-1} dx$$

$$(d) \qquad \int \sqrt{x^2-1} dx$$

$$(e) \qquad \int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

2) (6 punti, 2 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di questi integrali e serie sono convergenti.

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+n^{-2}+n^{-1})$$

$$(b) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x(\arctan x - \frac{\pi}{2})+1}{x^2+x+1} dx$$

$$(c) \qquad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan(n)}{\log(\log(n))}$$

3) (3 punti) Calcolare la serie di Taylor per $x_0 = 0$ di $\arctan x$.

4) (3 punti) Enunciare i teoremi fondamentali del calcolo.

5) (3 punti) Enunciare il criterio della radice per serie positive.

ANALISI Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame del 9.4.08. Argomentare le risposte

1) (6 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita, convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}.$$

2) (3 punti) Enunciare il principio di induzione.

3) (12 punti, 3 ciascuno) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)+3}{x^4\sin(\log(1+x^{-4}))+2}$$

(b) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n\,(n!)}$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-1}-2\right)$$

(d) $$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{2x}-\frac{1}{\sin x}\right]$$

4) (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri per funzioni continue.

5) (6 punti) Stabilire dove la seguente funzione $f(x)$ e' continua e dove non lo é. Stabilire dove é differenziabile, calcolandone la derivata, e dove non lo é.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x^2+x)^{-\frac{1}{2}}} & \text{per } x \notin [-1,0] \\ 0 & \text{per } -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

ANALISI Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame del 10.4.08. Argomentare le risposte

1) (15 punti, 3 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

(a)
$$\int \frac{e^{2x}+e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$$

(b)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^2(x)dx$$

(c)
$$\int \frac{x}{x^2-5x+6}dx$$

(d)
$$\int x\log(x)dx$$

(e)
$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$$

2) (6 punti, 2 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di questi integrali e serie sono convergenti.

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\log^2(1+n^{-1})+2\arctan(n)-\pi}{n\sin\left(n^{-2}+n^{-1}\right)+n^5(1-\tanh(n))+2}$$

(b)
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^{20}+x+1)}{x^2}dx$$

(c)
$$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2+1}{n^3\tan(n^{-1})+1}$$

3) (3 punti) Enunciare le formule del resto o di Peano e di Lagrange per i polinomi di Taylor.

4) (3 punti) Enunciare i teoremi fondamentali del calcolo.

5) (3 punti) Enunciare il criterio del quoziente per serie a termini positivi.

ANALISI Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame del 5.2.08. Argomentare le risposte

1) (6 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita, convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = (x+1)e^{-x}.$$

2) (18 punti, 3 ciascuno) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

$$(a) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\tanh\left(x^{\frac{1}{10}}\right)\right)+3}{x^4\sin(\log(1+x^{-4}))+2}$$

$$(b) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2n}}{(3n)!}$$

$$(c) \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1}\right)$$

$$(d) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\tan(x^{-2}+x^{-3})+x\tanh x+\sqrt{x^2+1}}{3x+x(\pi-\arctan(x^2))+1}$$

$$(e) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n\,(n!)}$$

$$(f) \qquad \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{2x}-\frac{1}{\sin x}\right]$$

3) (6 punti) Stabilire dove la seguente funzione $f(x)$ e' continua e dove non lo é. Stabilire dove é differenziabile, calcolandone la derivata, e dove non lo é.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}} & \text{per } x>0 \\ 1 \quad \text{per } -1\le x\le 0 \\ (x+1)\sin\left((x+1)^{-1}\right) & \text{per } x<-1 \end{cases}$$

ANALISI Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame del 14.2.08. Argomentare le risposte

1) (15 punti, 3 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \qquad \int \frac{e^{2x}+e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$$

$$(b) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)dx$$

$$(c) \qquad \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$(d) \qquad \int x\arctan(x)dx$$

$$(e) \qquad \int \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

2) (6 punti, 2 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di questi integrali e serie sono convergenti.

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\log(1+n^{-1})+\arctan(n)+2}{n\sin\left(n^{-3}+n^{-2}+n^{-1}\right)+n^5(1-\tanh(n))+2}$$

$$(b) \qquad \int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$

$$(c) \qquad \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2+1}{n^3\tan(n^{-\frac{1}{2}}+n^{-2})+1}$$

3) (3 punti) Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 di $\log(1+x)$ in $x_0=0$

4) (3 punti) Enunciare le formule del resto o di Peano e di Lagrange per i polinomi di Taylor.

5) (3 punti) Enunciare il criterio di Leibniz per serie alternanti.

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame 28.3.07, prima prova d'esame.

1) (8 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita, convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = (x^2+1)e^{-x}.$$

Abbiamo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

$f'(x) = -(x-1)^2e^{-x}$. Siccome per $x \neq -1$ si ha $f'(x) < 0$ segue che -1 é un flesso e la funzione é decrescente. $f''(x) = (x-1)(x-3)e^{-x}$, quindi $f''(x) > 0$ al difuori di $[1,3]$ dove il grafico é convesso e $f''(x) < 0$ in $(1,3)$ dove il grafico é concavo.

2) (10 punti) Considerare la funzione $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$ nell'intervallo $[0,3]$.
(a) (5 punti) Trovare punti di massimo e di minimo assoluto in $[0,3]$.
(b) (5 punti)Stabilire quante sono le radici di $f(x)$ in $[0,3]$, senza necessariamente calcolarle esplicitamente .

Abbiamo $f'(x) = x(x^2-x-1)$ con $x=0$ un punto critico. Per eventuali altri punti critici risolvere $x^2-x-1=0$ con soluzioni

$$x_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Abbiamo $x_- < 0$ e $x_+ \in [0,3]$. Risulta che $f'(x) > 0$ per $x \in (x_+,3]$ e $f'(x) < 0$ per $x \in [0,x_+)$ quindi x_+ é il minimo assoluto. $f(0) = 1$ mentre

$$f(3) = \frac{3^4}{4} - 3^2 - \frac{3^2}{2} + 1 = 3^3(3/4 - 1/2) + 1 = \frac{3^3}{4} + 1 > 1$$

quindi 3 é il massimo assoluto.

Infine se $f(x_+) < 0$, o se in qualche altro punto $x_0 \in (0,3)$ risulta $f(x_0) < 0$, risulta che vi sono due zeri. Usiamo ripetutamente la relazione $x_+^2 = x_+ + 1$ per ridurre

$$f(x_+) = -\frac{5}{12}x_+ + \frac{2}{3}.$$

Quindi si tratta di verificare se x_+ é maggiore di $\frac{24}{15}$. Risulta con un calcolo sulla calcolatrice che in effetti $x_+ > \frac{24}{15}$ (si prendeva il massimo punteggio con meno di questo, semplicemente impostando la discussione correttamente) e questo implica che

$$f(x_+) = -\frac{5}{12}x_+ + \frac{2}{3} < 0$$

e che $f(x)$ ammette due zeri.

3) (12 punti, 3 ciascuno) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

(a) $$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{\sin x}{x}-1}$$

(b) $$\lim_{n\to +\infty} \frac{(4n)^n}{(2n)!}$$

(c) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (x-\frac{\pi}{2})\tan(x)$$

(d) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\sin(x)+x^2\tan(1/x)+x+1}{x^3(1-\tanh x)+x^2+x+1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{\sin x}{x}-1} = 1 \text{ Hopital}$$

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{(4n)^n}{(2n)!} = 0$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (x-\frac{\pi}{2})\tan(x) = 1 \text{ Hopital}$$

$$\frac{x^2\sin(x)+x^2\tan(1/x)+x+1}{x^3(1-\tanh x)+x^2+x+1} \approx \sin x \text{ non esiste limite}$$

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame 29.3.07, seconda prova d'esame.

1) (15 punti, 3 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \qquad \int \sin^2(x)\ \cos^3(x)\, dx$$

$$(b) \qquad \int \operatorname{arcsin}(x) dx$$

$$(c) \qquad \int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

$$(d) \qquad \int_1^2 x \log(x)\, dx.$$

$$(e) \qquad \int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1}\, dx.$$

2) (3punti) Stabilire se questo integrale é convergente

$$\int_0^{+\infty} x \sin(x) \frac{e^x + 2x^3 + 1}{\sin(x^2) + 2x + 1}\, dx$$

3) (6 punti, 3 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di queste serie sono convergenti

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \tanh n\right).$$

4) (6 punti)

(a) (3 punti) Calcolare Il polinomio di Taylor $T_{2,1}(x)$ di grado ≤ 3 in 1 di $f(x) = x^x$.

(b) (3 punti) Dare una stima dell'errore $|f(\pi) - T_{2,1}(\pi)|$

ANALISI Matematica 1. Prova itinere 1 del 8.11.07. Argomentare le risposte

1) (9 punti, 3 ciascuno) Stabilire se esistono o no i limiti e calcolarli se esistono

$$(a) \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-(n+1)\right)$$

$$(b) \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2n}}{n!}$$

$$(c) \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n\sin(n^2)+e^n+1}{6^n+n+1}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{n^2+n+1}-(n+1)\right)\frac{\sqrt{n^2+n+1}+(n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+(n+1)}\\ &=\frac{n^2+n+1-(n+1)^2}{\sqrt{n^2+n+1}+(n+1)}=\frac{-n}{\sqrt{n^2+n+1}+(n+1)}\\ &=\frac{-1}{\sqrt{1+n^{-1}+n^{-2}}+1+n^{-1}}\approx -1/2.\end{aligned}$$

Abbiamo

$$\frac{n^{2n}}{n!}=n^n\frac{n^n}{n!}\geq n^n\to\infty.$$

Abbiamo

$$\frac{n\sin(n^2)+e^n+1}{6^n+n+1}\approx\frac{e^n}{6^n}=e^{n(1-\log 6)}\to 0$$

poiché $\log 6>1$.

2) (3 punti) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Bernouilli.

3) (3 punti) Dimostrare utilizzando la definizione di limite che se $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ e $\lim_{n\to\infty}b_n=b$ con $a,b\in\mathbb{R}$, allora

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b.$$

4) (3 punti) Dare la definizione di limite superiore di una successione di numeri reali.

5) (12 punti, 4 ciascuno) Stabilire se esistono o no i limiti e calcolarli se esistono.

$$(a) \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{[x]^2+[x]+1}{x^2+x+1} \quad \text{dove } [x]=n \text{ per } n\leq x<n+1$$

$$(b) \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^x}$$

$$(c) \qquad \lim_{x\to 0}x\sin(1/x)$$

Posto $n = [x]$

$$\frac{[x]^2 + [x] + 1}{x^2 + x + 1} \approx \frac{[x]^2}{x^2} = \frac{n^2}{n^2 + 2n(x-n) + (x-n)^2}$$
$$= \frac{1}{1 + 2n^{-1}(x-n) + n^{-2}(x-n)^2} \to 1.$$

Per $x > e^2$ Abbiamo
$$\frac{e^x}{x^x} < \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x} \to 0$$

Abbiamo
$$|x \sin(1/x)| \leq |x| \to 0$$

ANALISI Matematica 1. Prova itinere 1 del 8.11.07. Argomentare le risposte

1) (9 punti, 3 ciascuno) Stabilire se esistono o no i limiti e calcolarli se esistono

(a)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \sin(n^{-\frac{1}{2}}) + 1}{n \arctan(\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}) + 1}$$

(b)
$$\lim_{n\to+\infty} (1 + \sin(1/n))^n$$

(c)
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2 - n + 1} - (n-1)\right)$$

Abbiamo
$$\frac{n \sin(n^{-\frac{1}{2}}) + 1}{n \arctan(\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}) + 1} \approx \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

Abbiamo

$$(1 + \sin(1/n))^n = \left[(1 + \sin(1/n))^{1/\sin(1/n)}\right]^{n \sin(1/n)}.$$

Applicando il logaritmo otteniamo

$$n \sin(1/n) \log\left((1 + \sin(1/n))^{1/\sin(1/n)}\right) \to 1 \times \log(e) = 1.$$

Pertanto il limite (b) é $= e$.
Il limite (c) si risolve in modo simile ad 1 (a) nell'esame precedente.

2) (3 punti) Enunciare il principio di separazione e usarlo per dimostrare il teorema che dice che sottoinsiemi della retta reale estesa ammettono estremo superiore.

3) (3 punti) Dimostrare utilizzando la definizione di limite che se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b.$$

4) (3 punti) Dare la definizione di limite di una successione di numeri reali.

5) (12 punti, 4 ciascuno) Stabilire se esistono o no i limiti e calcolarli se esistono.

(a)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^x}$$

(b)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cosh(x)\sinh(x)}{\sinh(3x)}$$

(c)
$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}} \sin(1/x)$$

Il limite (a) $= 0$, vedi esame precedente.
Abbiamo
$$\frac{\cosh(x)\sinh(x)}{\sinh(3x)} = \frac{\sinh(2x)}{2\sinh(3x)} \approx \frac{e^{2x}}{2e^{3x}} \to 0.$$

Abbiamo per $x \to 0^+$

$$-e^{-\frac{1}{x}} \leq e^{-\frac{1}{x}} \sin(1/x) \leq e^{-\frac{1}{x}}$$

e pertanto siccome

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

per i carabinieri
$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \sin(1/x) = 0.$$

Invece non esiste il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} \sin(1/x)$$

perche' $\sin(1/x)$ oscilla mentre

$$\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Pertanto il limite (c) non esiste.
ANALISI Matematica 1. Prova itinere 1 del 8.11.07. Argomentare le risposte

1) (9 punti, 3 ciascuno) Stabilire se esistono o no i limiti e calcolarli se esistono

(a) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-(n+1)\right)$$

(b) $$\lim_{n\to+\infty}(1+\sin(1/n))^n$$

(c) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\sin(n)+n+1}{n^{\frac{3}{2}}+n+2}$$

2) (3 punti) Dimostrare il teorema dell'unicitá del limite per successioni di numeri reali (é sufficiente il caso di limiti finiti).

3) (3 punti) Dimostrare che una successione monotona di numeri reali ha limite.

4) (3 punti) Dare la definizione di limite in un punto di una funzione.

5) (12 punti, 4 ciascuno) Stabilire se esistono o no i limiti e calcolarli se esistono.

(a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{e^x}$$

(b) $$\lim_{x\to0}x\sin(1/x)$$

(c) $$\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}\sin(1/x)$$

ANALISI Matematica 1. Prova itinere 2 del 22.11.07. Argomentare le risposte

1)(6 punti) Trovare i punti di massimo ed di minimo assoluto in $[-2,1]$ di

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x.$$

Quanti zeri ha $f(x)$ in $\mathbb{R}$? (altri 3 punti)

Abbiamo

$$f'(x) = (x+2)(x^2-1)$$

e quindi i punti critici sono -2, -1 ed 1. Notare che su $\mathbb{R}$ abbiamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

e che quindi su $\mathbb{R}$ la $f(x)$ ha punti di minimo assoluto. Guardandon ai segni della derivata si conclude che i punti di minimo assoluto vanno ricercati tra -2 ed 1. Abbiamo

$$f(1) = -\frac{19}{12}\,,\; f(-2) = \frac{2}{3}$$

e quindi il punto di minimo assoluto in $\mathbb{R}$ é 1. A maggior ragione il punto di minimo assoluto in $[-2,1]$ é 1. Il punto di massimo assoluto é necessariamente 1. Infine siccome $f(-2) = \frac{2}{3} > 0$ segue che per $x < 0$ si ha $f(x) > 0$. Allora $f(x)$ ha esattamente due zeri in $\mathbb{R}$, l'uno é $x = 0$, l'altro un punto sulla destra di 1.

2) (6 punti) Stabilire dove la seguente funzione e' continua, dove é differenziabile, calcolandone il valore dove é differenziabile e dimostrando la non differenziabilitá laddove non é differenziabile:

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & \text{per } x > 0 \\ x\sin(1/x) & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\log x}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} x\sin(1/x) = 0.$$

Quindi $f(x)$ é continua in 0 cosí come altrove. Per la derivata

$$(e^{\frac{\log x}{x}})' = e^{\frac{\log x}{x}} \frac{1-\log x}{x^2}$$

$$(x \sin(1/x))' = \sin(1/x) - \frac{\cos(1/x)}{x}$$

con

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \sin(1/x) \text{ non esiste.}$$

Quindi la derivata esiste per $x \neq 0$ ma non in 0.

3) (3 punti) Enunciare il teorema di Lagrange e dimostrare il teorema di Rolle.

4) (3 punti) Enunciare e dimostrare la regola del prodotto per la derivata.

5) (9 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavitá ,convessitá, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = e^x(1 - \tanh x).$$

ANALISI Matematica 1. Prova itinere 2 del 22.11.07. Argomentare le risposte

1) (6 punti) Trovare i punti di massimo e di minimo assoluto in $[-5, 0]$ di

$$f(x) = e^x(x^3 + x^2 + x + 11).$$

Quanti zeri ha $f(x)$ in $\mathbb{R}$? (altri 3 punti)

Abbiamo

$$f'(x) = e^x(x^3 + 4x^2 + 3x + 12) = e^x(x^2 + 3)(x + 4).$$

Quindi -4 é l'unico punto critico in $\mathbb{R}$. Notiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \& \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

e che il segno di $f(x)$, essendo uguale al segno di $x^3 + x^2 + x + 11$, é negativo per $x \to -\infty$. Questo significa che su $\mathbb{R}$ la $f(x)$ ha un punto di minimo assoluto, che deve essere necessariamente -4. A maggior ragione, -4 é il minimo assoluto in $[-5, 0]$. I punti di massimo sono o -5 oppure 0. Per dirimere la questione, osserviamo che abbiamo $f(0) = 11$. Tra 0 e -4 c'e' uno zero di $f(x)$. Abbiamo $f(-4) < 0$ e visto che $f'(x) < 0$ per $x < -4$ e che $f(x) < 0$ per $x \to -\infty$, necessariamente $f(x) < 0$ per $x < -4$. Pertanto $f(-5) < 0$ e 0 é il punto di massimo assoluto. Infine, in $x > -4$ abbiamo $f'(x) > 0$ e quindi la $f(x)$ ha esattamente uno 0 in $\mathbb{R}$.

2) (6 punti) Stabilire dove la seguente funzione e' continua, dove é differenziabile, calcolandone il valore dove é differenziabile e dimostrando la non differenziabilitá laddove non é differenziabile:

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} - 1 \quad \text{per } x > 0 \\ e^{\frac{1}{x}} \text{ per } x < 0 \\ 0 \text{ per } x = 0 \end{cases}$$

Abbiamo

$$\lim_{x \to 0^+} (x^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \to 0^+} (e^{\frac{\log x}{x}} - 1 = e^{-\infty} - 1 = -1$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0.$$

Quindi $f(x)$ non é continua in 0. E' peró continua altrove. Abbiamo

$$(e^{\frac{\log x}{x}})' = e^{\frac{\log x}{x}} \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$(e^{\frac{1}{x}})' = -e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}$$

e pertanto le derivate sono ben definite per $x \neq 0$. Non in 0 dove la funzione non é continua

3) (3 punti) Enunciare e dimostrare quale é la derivata dell'arcoseno.

4) (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass per funzioni continue.

5) (9 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavitá ,convessitá, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}.$$

ANALISI Matematica 1. Prova itinere 2 del 22.11.07. Argomentare le risposte

1)(6 punti) Trovare i punti di massimo ed di minimo assoluto in $[-2, 0]$ di

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x.$$

Quanti zeri ha $f(x)$ in $\mathbb{R}$? (altri 3 punti)

SI procede come sopra, ed ora punto di minimo e' 0 mentre punto di massimo e' sempre -1,

2) (6 punti) (6 punti) Stabilire dove la seguente funzione e' continua, dove é differenziabile, calcolandone il valore dove é differenziabile e dimostrando la non differenziabilitá laddove non é differenziabile:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) \quad \text{per } x > 0 \\ e^{\frac{1}{x}} \quad \text{per } x < 0 \\ 0 \text{ per } x = 0 \end{cases}$$

3) (3 punti) Enunciare e dimostrare quale é la derivata dell'arcotangente.

4) (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di degli zeri per funzioni continue.

5) (9 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavitá ,convessitá, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = e^x \frac{x+1}{x-1}.$$

ANALISI Matematica 1. Prova itinere 3 del 6.12.07. Argomentare le risposte

1) (18 punti, 3 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \qquad \int \frac{\cos^3(x)}{1+\sin^3(x)}\,dx$$

$$(b) \qquad \int_1^2 (x^2+1)\log(x)dx$$

$$(c) \qquad \int \frac{dx}{x^2-5x+6}$$

$$(d) \qquad \int \tanh(x)dx$$

$$(e) \qquad \int (x^3+x)\arctan(x^2)dx$$

$$(f) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

2) (6 punti, 2 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di questi integrali e serie sono convergenti. Per le serie dimostrare anche se sono o non sono assolutamente convergenti.

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{n^2+n+1}{n^4+n+1}\right)$$

$$(b) \qquad \int_1^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x)\right)\frac{e^{\sqrt{x}}}{2+\cosh(\sqrt{x})}dx$$

$$(c) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \left((-1)^n\frac{1}{\log n}+\frac{1}{n}\right)$$

3) (3 punti) Definire i polinomi di Taylor di una funzione in un punto ed enunciare le formule di resto di Peano e di Lagrange

4) (3 punti) Dimostrare che per $p > 1$ il seguente integrale é convergente:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

ANALISI Matematica 1. Prova itinere 3 del 6.12.07. Argomentare le risposte

1) (18 punti, 3 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

(a) $$\int x\cos^2(x)\sin(x)\,dx$$

(b) $$\int_0^2 (x^3+x^5)e^{x^2}\,dx$$

(c) $$\int \frac{dx}{(x+2)(x-1)x}$$

(d) $$\int x\log(x)dx$$

(e) $$\int (x^2+x)\arctan(x)dx$$

(f) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

2) (6 punti, 2 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di questi integrali e serie sono convergenti. Per le serie dimostrare anche se sono o non sono assolutamente convergenti.

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\log(1+1/n)$$

(b) $$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\arcsin(e^{-n})+1}{n^3+1}$$

3) (3 punti) Enunciare i due teoremi fondamentali del calcolo

4) (3 punti) Dimostrare che la seguente uguaglianza é vera per ogni x:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, esame 9.1.07, prima prova d'esame.

1) (8 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita, convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

2) (10 punti) Considerare la funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x + 2$ nell'intervallo $[0, 10]$.

(a) (3 punti) Dimostrare applicando l'opportuno teorema che essa ha punti di massimo e punti di minimo assoluti. In particolare enunciare il teorema applicato.

(b) (5 punti)Trovare i punti di massimo e di minimo assoluti.

(c) (2 punti) Verificare se l'equazione $f(x) = 0$ ha soluzioni in $[0, 10]$. Non é necessario trovarle esplicitamente.

3) (9 punti, 3 ciascuno) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

$$(a) \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$(b) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

$$(c) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(\arctan(x) + \tanh(x) - 3) + x^3\sin(1/x)}{x^2+1}.$$

4) (3 punti) Enunciare le regole dell' Hopital.

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, esame 10.1.07, seconda prova d'esame.

1) (12 punti, 3 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \qquad \int x \cos(x^2+1)\,dx$$

$$(b) \qquad \int_1^2 xe^x\,dx$$

$$(c) \qquad \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}.$$

$$(d) \qquad \int_0^\pi e^x \sin(x)\,dx.$$

2) (6 punti, 3 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni confronti, quali di questi integrali sono convergenti

$$(a) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2+x^6}{1+x^3+7x^4+x^7}\,dx$$

$$(b) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

3) (6 punti, 3 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di queste serie sono convergenti

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \log(1+n^{-1}+n^{-2})$$

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}.$$

4) (6 punti) Calcolare Il polinomio di Taylor $T_{3,0}(x)$ di grado ≤ 3 in 0 della funzione $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$. Poi dare una stima dell'errore $|T_{3,0}(1) - f(1)|$.

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame 11.7.07, prima prova d'esame. Argomentare bene le risposte.

1) (8 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita, convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = (x^2 + x + 1)e^x.$$

2) (2 punti) Enunciare il teorema della conservazione del segno per funzioni continue.

3) (2 punti) Enunciare il teorema degli zeri per funzioni continue. Dimostrarlo (altri 3 punti).

4) (5 punti) Trovare massimi e minimi assoluti di $f(x) = x^3 - x^2 - x$ in $[0, 1]$.

5) (10 punti, 2 ciascuno) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli (calcolare i limiti applicando gli opportuni teoremi, gli opportuni limiti notevoli, gli opportuni confronti. Non é sufficiente scrivere il solo risultato finale, corretto o sbagliato che sia):

$$(a) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{x^3 \tan(x^{-2} + x^{-3}) + x \arctan x + \sqrt{x^2+1}}{3x + x^4(1 - \tanh(x)) + 1}$$

$$(b) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \cos(1/x) + x^2 + 1}{x^3 \sin(1/x) + 3x + 1}$$

$$(c) \qquad \lim_{x\to 0} (1 - \tanh(1/x)) e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(d) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(2^n)^n}{n^n}$$

$$(e) \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1 + x^4 + x} - (x^2 + \sqrt{x})\right)$$

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, 12.7.07.

1) (16 punti, 4 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \qquad \int e^x \cos^2 x \, dx$$

$$(b) \qquad \int_0^1 \frac{1+2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$(c) \qquad \int \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

$$(d) \qquad \int_1^2 \arctan(x) dx$$

2) (10 punti, 2 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di questi integrali e serie sono convergenti

$$(a) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^6 \sin(x^{-4}) + (1-\tanh x) + x + 1} dx$$

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^4+n+1}}$$

$$(c) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$$

$$(d) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2(n)}$$

$$(e) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log\left(\log\left(\log(n)+2\right)+4\right)}$$

3) (2 punti) Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

4) (2 punti) Mostrare con un esempio che la convergenza di una serie non ne assicura l'assoluta convergenza.

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame 12.9.07, prima prova d'esame.

1) (8 punti) Studiare il grafico di

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

2) Enunciare il principio di separazione sulla retta reale (3 punti). Verificare se il principio di separazione vale nell'insieme dei numeri razionali, con una dimostrazione se vale, con un controesempio se non vale (2 punti). Utilizzare il principio di separazione sulla retta reale per dipostrare che ogni sottoinsieme della retta reale estesa $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ ammette un estremo superiore (2 punti).

3) (12 punti, 3 ciascuno) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

(a)
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2(e^{-\frac{1}{x^2}} - 1) + x + 1}{2x^3 \sin(\frac{1}{x^2}) + 3x + 1}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x \arctan(\frac{1}{x})}{\tanh x}$$

(c)
$$\lim_{x\to +\infty} (\arctan(x^2) - \frac{\pi}{2})(x \sin x + x + 1$$

(d)
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

4) (3 punti) Enunciare il teorema di Weierstrass ed il teorema degli zeri per funzioni continue.

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, 13.9.07.

1) (16 punti, 4 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \qquad \int (x^2+x)\cos^2 x\, dx$$

$$(b) \qquad \int_0^1 x\cosh x dx$$

$$(c) \qquad \int \frac{x^2+1}{x+2}$$

$$(d) \qquad \int_1^2 x^2\log(x)dx$$

2) (8 punti, 2 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di questi integrali e serie sono convergenti. Per le serie dimostrare anche se sono o non sono assolutamente convergenti.

$$(a) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4\tanh x+1}\, dx$$

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+n+1}-n^2\right)$$

$$(c) \qquad \int_1^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x^2}dx$$

$$(d) \qquad \sum_{n=10}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\log(n)\log(\log n)}$$

3) (3 punti) Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \cos x + \cos^2 x$

4) (3 punti) Dimostrare che la seguente uguaglianza é vera per ogni x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame 13.7.07, prima prova d'esame. Argomentare bene le risposte.

1) (8 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita, convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = (x^2 + x + 1)e^x.$$

2) (2 punti) Enunciare il teorema della conservazione del segno per funzioni continue.

3) (2 punti) Enunciare il teorema degli zeri per funzioni continue. Dimostrarlo (altri 3 punti).

4) (2 punti) Enunciare il primo teorema fondamentale del calcolo. Dimostrarlo (altri 3 punti).

5) (10 punti, 2 ciascuno) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli (calcolare i limiti applicando gli opportuni teoremi, gli opportuni limiti notevoli, gli opportuni confronti. Non é sufficiente scrivere il solo risultato finale, corretto o sbagliato che sia):

(a) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^3\tan(x^{-2}+x^{-3}) + x\arctan x + \sqrt{x^2+1}}{3x + x^4(1-\tanh(x)) + 1}$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\cos(1/x) + x^2 + 1}{x^3\sin(1/x) + 3x + 1}$$

(c) $$\lim_{x\to 0}(1-\tanh(1/x))e^{\frac{1}{x^2}}$$

(d) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2^n)^n}{n^n}$$

(e) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+x^4+x} - (x^2+\sqrt{x})\right)$$

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, 15.6.07.

1) (16 punti, 4 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \qquad \int e^x \cos^2 x\, dx$$

$$(b) \qquad \int_0^1 \frac{1+2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$(c) \qquad \int \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

$$(d) \qquad \int_1^2 \arctan(x) dx$$

2) (10 punti, 2 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di questi integrali e serie sono convergenti

$$(a) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^6(3\sin(x^{-4})+(1-\tanh x)+x+1} dx$$

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^4+n+1}}$$

$$(c) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$$

$$(d) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2(n)}$$

$$(e) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\log\left(\log\left(\log(n)+2\right)+4\right)}$$

3) (2 punti) Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

4) (2 punti) Mostrare con un esempio che la convergenza di una serie non ne assicura l'assoluta convergenza.

ANALISI Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame del 13.12.07. Argomentare le risposte

1) (6 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita, convessita, flessi e tracciare il grafico di
$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}.$$

2) (3 punti) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Bernouilli.

3) (9 punti, 3 ciascuno) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

$$(a) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\log(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}})+1}{2x^3\sin(\frac{1}{x^2}(\arctan x - \frac{\pi}{2}))+1}$$

$$(b) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

$$(c) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(\arctan(x)+\sinh(x)-3)+x^3\sin(x)}{x^2+1}$$

4) (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass per funzioni continue.

5) (6 punti) Stabilire dove la seguente funzione e' continua, dove é differenziabile, calcolando il valore della derivata dove é differenziabile e dimostrando la non differenziabilitá laddove non é differenziabile:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x^2}} & \text{per } x > 1 \\ 1 & \text{per } 0 \le x \le 1 \\ x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{-x}}\right) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

ANALISI Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame del 14.12.07. Argomentare le risposte

1) (15 punti, 3 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \qquad \int x\cos^2(x)\sin(x)\,dx$$

$$(b) \qquad \int_1^2 x^2\log(x^2)dx$$

$$(c) \qquad \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$(d) \qquad \int \arctan(x)dx$$

$$(e) \qquad \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

2) (6 punti, 2 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di questi integrali e serie sono convergenti.

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$$

$$(b) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x}{\cosh(\sqrt{x})}dx$$

$$(c) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n^2)\right)$$

3) (3 punti) Definire i polinomi di Taylor di una funzione in un punto ed enunciare le formule di resto di Peano e di Lagrange

4) (6 punti) Enunciare e dimostrare i due teoremi fondamentali del calcolo.

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame 19.9.07, prima prova d'esame.

1) (8 punti) Studiare il grafico di

$$f(x) = (x^2 + x + 1)e^x.$$

2) (2 punti) Enunciare la disuguaglianza di Bernouilli. Dimostrarla (altri 2 punti).

3) (12 punti, 3 ciascuno) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

(a)
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2(e^{-\frac{1}{x}} - 1) + x + 1}{2x^3 \tan(\frac{1}{x^2}) + 1}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x \arcsin(\frac{1}{x})}{\arctan(x) + 1}$$

(c)
$$\lim_{x\to +\infty} (\tanh(\sqrt{x}) - 1)(x \sin x + x + 1)$$

(d)
$$\lim_{x\to +\infty} \left[\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - x\right]$$

4) (6 punti) Determinare massimo e minimo assoluto in $[0, 1]$ di

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} + 1.$$

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame 13.9.07, seconda prova d'esame.

1) (15 punti, 3 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

(a) $$\int_0^1 \sin^2(x)\,\cos^2(x)\,dx$$

(b) $$\int_0^1 x\log(x)dx$$

(c) $$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

(d) $$\int_1^2 \frac{e^t+1}{e^t-1}\,dt.$$

(e) $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

2) (4punti) Enunciare il primo ed il secondo teorema fondamentale del calcolo

3) (3punti) Enunciare le regole dell'Hopital.

4) (8 punti, 2 ciascuno) Stabilire se is seguenti integrali e serie sono convergenti, applicando gli opportuni criteri:

(a) $$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log^2(x)}\,dx$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \arctan\left(\frac{1+n}{n^2+1}\right)$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}$$

(d) $$\int_2^{+\infty} \frac{x\sin(\frac{1}{x^2})+\arctan(x)-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{x}+2}$$

5) (3 punti) Enunciare la formula di Peano e la formula di Lagrange per il resto quando si approssima una funzione con un suo polinomio di Taylor

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame 14.6.07, prima prova d'esame.

1) (8 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita, convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = (x^2 - 1)e^x.$$

2) (2 punti) Enunciare il secondo teorema fondamentale del calcolo. Dimostrarlo (altri 3 punti).

3) (2 punti) Enunciare il primo teorema fondamentale del calcolo. Dimostrarlo (altri 3 punti).

4) (12 punti, 3 ciascuno) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

(a) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^3 \sin(x^{-2} + x^{-3}) + x \arctan x + \sqrt{x+1}}{3x + x(1 - \tanh(x)) + 1}$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \cos(1/x) + x^2 + 1}{x^3 \sin(1/x) + 3x + 1}$$

(c) $$\lim_{x\to 0} x^5 e^{\frac{1}{x^2}}$$

(d) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n\,(n!)}$$

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, 15.6.07.

1) (16 punti, 4 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \qquad \int x \cos^4 x \, dx$$

$$(b) \qquad \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx$$

$$(c) \qquad \int \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

$$(d) \qquad \int_1^2 x \log(x) dx$$

2) (10 punti, 2 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di questi integrali e serie sono convergenti

$$(a) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{7+x+x^2\sin(1/\sqrt{x})} \, dx$$

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\sin(1/n)\right)$$

$$(c) \qquad \int_1^{+\infty} e^{-x}(x^4+x^2+x+1) dx$$

$$(d) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2\arctan(n)+n+\sqrt{n}+1}$$

$$(d) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log\left(\log(n)+2\right)}$$

3) (2 punti) Enunciare le formule di Lagrange e di Peano per l'errore quando si approssima una funzione con un suo polinomio di Taylor. Utilizzare la formula per l'errore opportuna per dimostrare che la serie di Taylor di e^x converge ad e^x (altri 2 punti).

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame 25.7.07, prima prova d'esame. Argomentare bene le risposte.

1) (8 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita, convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}.$$

2) (2 punti) Enunciare il teorema di Weierstrass per funzioni continue.

3) (2 punti) Enunciare il teorema degli zeri per funzioni continue.

4) (3 punti) Enunciare le regole dell'Hopital.

5) (5 punti) Trovare massimi e minimi assoluti di $f(x) = x \sin(x)$ in $[0, 1]$.

6) (10 punti, 2 ciascuno) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli (calcolare i limiti applicando gli opportuni teoremi, gli opportuni limiti notevoli, gli opportuni confronti. Non é sufficiente scrivere il solo risultato finale, corretto o sbagliato che sia):

$$(a) \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{x^3 \sin(x^{-2} + x^{-3}) + x^3(\frac{\pi}{2} - \arctan x) + x^2(1 - \tanh x)}{x^2 + 1}$$

$$(b) \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \sin(x) + x + 1}{\cosh(x) + x + 1}$$

$$(c) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^{-3})}{1 - \tanh(x^{-2})}$$

$$(d) \qquad \lim_{n \to +\infty} (n!)^{\frac{1}{n}}$$

$$(e) \qquad \lim_{x \to 0} x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, 26.7.07.

1) (16 punti, 4 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \qquad \int (x^2+x)\cos^2 x\,dx$$

$$(b) \qquad \int_0^1 x\cosh x dx$$

$$(c) \qquad \int \frac{x^2+1}{x+2}$$

$$(d) \qquad \int_1^2 x^2\log(x)dx$$

2) (8 punti, 2 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di questi integrali e serie sono convergenti. Per le serie dimostrare anche se sono o non sono assolutamente convergenti.

$$(a) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4\tanh x+1}\,dx$$

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+n+1}-n^2\right)$$

$$(c) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}dx$$

$$(d) \qquad \sum_{n=10}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\log(n)\log(\log n)}$$

3) (3 punti) Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 in $x_0=0$ della funzione $f(x)=\cos x+\cos^2 x$

4) (3 punti) Dimostrare che la seguente uguaglianza é vera per ogni x:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, esame 27.6.07, prima prova d'esame.

1) (8 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita, convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = (x^2 - 1)e^x.$$

2) (2 punti) Enunciare il secondo teorema fondamentale del calcolo. Dimostrarlo (altri 3 punti).

3) (2 punti) Enunciare il primo teorema fondamentale del calcolo. Dimostrarlo (altri 3 punti).

4) (12 punti, 3 ciascuno) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

(a) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^3 \sin(x^{-2} + x^{-3}) + x \arctan x + \sqrt{x+1}}{3x + x(1 - \tanh(x)) + 1}$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \cos(1/x) + x^2 + 1}{x^3 \sin(1/x) + 3x + 1}$$

(c) $$\lim_{x\to 0} x^5 e^{\frac{1}{x^2}}$$

(d) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n\,(n!)}$$

Analisi Matematica 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, 28.6.07.

1) (16 punti, 4 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \qquad \int x\cos^2 x \sin^2 x\, dx$$

$$(b) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$$

$$(c) \qquad \int \frac{1}{x(x-1)(x-2)}$$

$$(d) \qquad \int_1^2 x\arctan(x)dx$$

2) (10 punti, 2 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di questi integrali e serie sono convergenti

$$(a) \qquad \int_{10}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x+x^2\sin(1/\sqrt{x})}\, dx$$

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$(c) \qquad \int_1^{+\infty} e^x\left(1-\tanh(2x)\right)dx$$

$$(d) \qquad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)\log(\log(n))}$$

$$(d) \qquad \sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(\log(n))}$$

3) (2 punti) Dimostrare condizione necessaria perché $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente é che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dimostrare con un esempio che la condizione $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ non é sufficiente alla convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (altri 2 punti).

ANALISI Matematica 1. prova itinere 1 del 26.10.06. Argomentare le risposte

1) (15 punti, 3 ciascuno) Stabilire se esistono o no i limiti e calcolarli se esistono

$$(a) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{5^n}$$

$$(b) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\sin(n)+n+1}{n^{\frac{3}{2}}+n+2}$$

$$(c) \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$(d) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\sin(1/n)+n^2+n+1}{n^2+n+1}$$

Abbiamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty$ dal confronto e da

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{1.2.3.4.5...(n-1).n}{5.5...5.5} \geq \frac{1.2.3.4.5}{5^5}\left(\frac{6}{5}\right)^{n-5} \to +\infty$$

(b) non esiste perché

$$\frac{n^2\sin(n)+n+1}{n^{\frac{3}{2}}+n+2} = \sqrt{n}\frac{\sin(n)+n^{-1}+n^{-2}}{1+n^{-\frac{1}{2}}+2n^{-\frac{3}{2}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Ora applicando il log,

$$\log\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\log\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = 0\cdot 1 = 0.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = e^0 = 1.$$

Il limite (d) é 2 perché

$$\frac{n^3\sin(1/n)+n^2+n+1}{n^2+n+1} = \frac{\frac{\sin(1/n)}{1/n}+1+n^{-1}+n^{-2}}{1+n^{-1}+n^{-2}} \to \frac{1+1+0+0}{1+0+0}.$$

2) (3 punti) Enunciare la disuguaglianza di Bernoulli. Dimostrare poi che per $a > 1$ si ha $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

3) (12 punti, 3 ciascuno) Stabilire se esistono o no i limiti e calcolarli se esistono. Le risposte saranno accettate solo se si usa qualcosa visto finora nel corso

(a) $$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$$

(c) $$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$$

Abbiamo
$$\frac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6} = \frac{\sin(x-3)}{(x-3)}\frac{1}{x-2} \to 1\cdot 1.$$

Abbiamo
$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{(1+\frac{x}{2})^2}{x} = \frac{1+x+\frac{x^2}{4}}{x} \to +\infty.$$

Abbiamo $0 \leq |x\sin(1/x)| \leq |x| \to 0$.

ANALISI Matematica 1. prova itinere 1 del 26.10.06. Argomentare le risposte

1) (15 punti, 3 ciascuno) Stabilire se esistono o no i limiti e calcolarli se esistono

(a) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

(b) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(\arctan(n)-\pi/2)+n+1}{n^2+n+2}$$

(c) $$\lim_{n\to+\infty} (1+\sin(1/n))^n$$

(d) $$\lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{n^2\tan(1/n)+n^2+n+1}{n^2+n+1}\right)$$

Per (b) e (c) vedi sopra. Il limite in (a) é 0. Infatti

$$\frac{n^n}{(2n)!} = \frac{n^n}{n!(n+1)(n+2)...(2n)} < \frac{1}{n!} \to 0$$

Il limite (d) é 1 perché

$$\frac{n^2\tan(1/n)+n^2+n+1}{n^2+n+1} = \frac{\tan(1/n)+1+n^{-1}+n^{-2}}{1+n^{-1}+n^{-2}} \to \frac{0+1+0+0}{1+0+0}.$$

2) (3 punti) Enunciare il principio di separazione e usarlo per dimostrare il teorema che dice che sottoinsiemi della retta reale estesa ammettono estremo superiore.

3) (12 punti, 3 ciascuno) Stabilire se esistono o no i limiti e calcolarli se esistono.

(a)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^x + x^3 + x + 1}{x^{16} + x + 1}$$

(b)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

(c)
$$\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$$

Per

ANALISI Matematica 1. prova itinere 1 del 26.10.06. Argomentare le risposte

1) (15 punti, 3 ciascuno) Stabilire se esistono o no i limiti e calcolarli se esistono

(a) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

(b) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\sin(n)+n+1}{n^{\frac{3}{2}}+n+2}$$

(c) $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

(d) $$\lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{n^2\tan(1/n)+n^2+n+1}{n^2+n+1}\right)$$

2) (3 punti) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Bernoulli usando il principio di induzione

3) (12 punti, 3 ciascuno) Stabilire se esistono o no i limiti e calcolarli se esistono.

(a) $$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

(c) $$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$$

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 7.9.06.

1) (10 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

quindi i punti critici sono ± 1.

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'' = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}$$
$$= \frac{-2x(1+x^2)}{(1+x^2)^4}(1+x^2+2(1-x^2)) = \frac{-2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}x(3-x^2)$$

pertanto i flessi sono $x = 0 = \pm\sqrt{3}$.

2) (9 punti) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

(a)
$$\lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x^2}}$$

(b)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{e^n}}{n!}$$

(c)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x\sin(x^4)}{x^2+1}.$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{1-x^2}} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{1-x^2}} = 0.$$

Abbiamo

$$\log\left(\frac{e^{e^n}}{n!}\right) = \log\left(e^{e^n}\right) - \log(n!) = e^n - (\log(1) + \log(2) + .. + \log(n))$$
$$\geq e^n - n\log(n) \geq e^n - n^2 \to +\infty.$$

Quindi per confronto

$$\lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{e^{e^n}}{n!}\right) = +\infty$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{e^n}}{n!}=\lim_{n\to+\infty}e^{\log\frac{e^{e^n}}{n!}}=e^{+\infty}=+\infty.$$

Infine

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x\sin(x^4)}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}+\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin(x^4)}{x^2+1}=1+0=1.$$

3) (9 punti) Calcolare la serie di Taylor di $\arctan x$ in corrispondenza ad $x_0=0$. La sapreste utilizzare per scrivere approssimazioni di π? (altri 2 punti).

Ricordiamoci che $\frac{d}{dx}\arctan x=\frac{1}{1+x^2}$. Quest'ultimo ha serie

$$1-x^2+x^4-x^6+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

che integrata ci da la serie di $\arctan x$ ossia

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Abbiamo ad esempio $\arctan 1=\pi/4$ e da qui abbiamo

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}.$$

troncamenti

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

di questa serie, danno approssimazioni, e siccome la serie é alternante, l'errore é maggiorato da $\frac{1}{2(N+1)+1}$.

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 8.9.06.

1) (12 punti) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \qquad \int x\,\cos(x)\,dx$$

$$(b) \qquad \int_1^2 x^3\log(x)dx$$

$$(c) \qquad \int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}.$$

$$(d) \qquad \int_0^\pi e^x\sin(x)\,dx.$$

2) (9 punti) Stabilire applicando gli opportuni confronti, quali di questi integrali sono convergenti

$$(a) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^3\sin(x^{-2})}\,dx$$

$$(b) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1+x^3\log(1+x^{-1})}{1+x^2+x^4}dx$$

$$(a) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

3) (9 punti) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di queste serie sono convergenti

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+n^{-2})$$

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{n^3+1},$$

$$(c) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{n!}.$$

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 11.7.06.

1) (10 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = x^2 e^x.$$

Notare innanzitutto che $f(x) \geq 0$ con $f(x) = 0$ esattamente per $x = 0$, il quale pertanto é il minimo assoluto. Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^x = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 e^x = 0.$$

Notare che per $-\infty x < 0$ abbiamo $f(x) > 0$ e che pertanto esisterá almeno un massimo relativo $-\infty x_0 < 0$. Determiniamo ora i punti critici.

$$f'(x) = (x^2 + 2x)e^x = x(x+2)e^x = 0$$

ha come soluzioni $x = 0$ (che infatti abbiamo appena visto essere il minimo assoluto) ed $x = -2$. Prima abbiamo discusso il fatto che ci doveva essere un massimo relativo in $(-\infty, 0)$, et voilá, abbiamo appunto trovato $x = -2$. Infine osserviamo che vicino a $-\infty$, 0 & $+\infty$ la funzione deve essere convessa, mentre vicino a -2 é concava. Quindi ci saranno almeno due flessi $x_1 < -2$ & $-2 < x_2 < 0$.

$$f'(x) = (x^2+2x+2x+2)e^x = (x^2+4x+2)e^x = 0 \quad , \quad x_\pm = -2\pm\sqrt{4-2} = -2\pm\sqrt{2}.$$

Abbiamo trovato due flessi, ed abbiamo, a conferma di quanto ricavato prima ancora di fare l'ultimo conto,

$$-2-\sqrt{2} < 2 \quad , \quad -2 < -2+\sqrt{2} < 0.$$

2) (10 punti) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

(a) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n\,(n!)}$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \left((\log x)^2 - (\log(x-1))^2\right)$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(\tanh x - 1) + \cos(\frac{1}{\sqrt{x}})}{x + \log(x) + 1}.$$

$$\frac{(2n)!}{n^n\,(n!)} = \frac{(n!)(n+1)(n+2)\cdots(n+n-1)(n+n)}{n^n\,(n!)} =$$
$$(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n-1}{n})(1+\frac{n}{n})$$

Ora, posto $[\frac{n}{2}]$ il massimo intero $\leq \frac{n}{2}$, utilizziamo le disuguaglianze

$$(1+\frac{j}{n})>1 \text{ per } j\leq[\frac{n}{2}]$$
$$(1+\frac{j}{n})>(1+\frac{1}{2})=\frac{3}{2} \text{ per } j>[\frac{n}{2}].$$

Allora

$$(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{[\frac{n}{2}]}{n})(1+\frac{[\frac{n}{2}]+1}{n})\cdots(1+\frac{n-1}{n})(1+\frac{n}{n})$$
$$>(1+\frac{[\frac{n}{2}]+1}{n})\cdots(1+\frac{n-1}{n})(1+\frac{n}{n})>\left(\frac{3}{2}\right)^{[\frac{n}{2}]}\to+\infty.$$

Per confronto

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{n^n\,(n!)}=+\infty.$$

$$\big((\log x)^2-(\log(x-1))^2\big)=(\log x-\log(x-1))\,(\log x+\log(x-1))$$
$$=\left(\log\frac{x}{x-1}\right)\big(\log(x^2-x)\big)=0\cdot(+\infty)$$

Applichiamo Hopital.

$$\left(\log\frac{x}{x-1}\right)\big(\log(x^2-x)\big)=\frac{\log\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{\log(x^2-x)}}\approx\frac{\frac{x-1}{x}\,\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{-1}{\log^2(x^2-x)}\,\frac{1}{x^2-x}(2x-1)}$$
$$=\frac{\log^2(x^2-x)}{2x-1}\to 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(\tanh x-1)+\cos(\frac{1}{\sqrt{x}})}{x+\log(x)+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(\tanh x-1)}{x+\log(x)+1}$$
$$+\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(\frac{1}{\sqrt{x}})}{x+\log(x)+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(\tanh x-1)}{x+\log(x)+1}+\frac{1}{\infty}$$

Applicando Hopital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(\tanh x-1)}{x+\log(x)+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x(\tanh x-1)+x^2\frac{1}{\cosh^2 x}}{1+\frac{1}{x}}$$

Ora abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x(\tanh x-1)+x^2\frac{1}{\cosh^2 x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}2\frac{(\tanh x-1)}{\frac{1}{x}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\cosh^2 x}}{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

Pertanto 0 é il valore del limite.

3) (10 punti) Enunciare un teorema che garantisce che la seguente funzione ha massimi e minimi e determinarli: $f(x)$ definita in $[0,3]$ da

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2.$$

Si applica il teorema di Weierstrass, che dice che una funzione continua (quale e' il polinomio $f(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2$) definita in un intervallo chiuso e limitato (quale e' $[0,3]$) ammette punti di massimo e di minimo assoluto. Per trovarli in questo esempio, si calcola

$$f'(x) = x^3 + 3x^2 - 4x = x(x^2 + 3x - 4) = x(x-1)(x+4)$$

con $x = 0$ ed $x = 1$ i punti critici contenuti in $[0,3]$. Poi si calcola $f(0) = 0$, $f(1) = -\frac{3}{4}$ $f(3) = \frac{81}{4} + 27 - 18 > 0$ per concludere che 1 é il punto di minimo assoluto e 3 é il punto di massimo assoluto.

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 12.7.06.

1) (8 punti) Calcolare i seguenti integrali

$$\int x \cos^2 x \, dx$$
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx$$
$$\int \frac{x}{(x-1)(x-2)}.$$

Per $\int x \cos^2 x \, dx$ usare $\cos^2 x = \frac{\cos(2x)+1}{2}$ ottenendo

$$\int x \cos^2 x \, dx = \int x \, \frac{\cos(2x)+1}{2} \, dx = \frac{x^2}{4} + \int x \cos(2x) \, dx$$

integrando l'ultimo per parti. Per il secondo, porre $t = \sqrt{x-1}$, $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}$ e

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx = \int (t^2+1)^2 dt$$

eccetera. Infine per il terzo integrale, siccome il grado del denominatore é 2 mentre il grado del numeratore 1é 1, trovare A & B tali che

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

e poi integrare ques'ultima funzione.

2) (8 punti) Stabilire applicando gli opportuni confronti, quali di questi integrali sono convergenti

$$(a) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\,dx$$

$$(b) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1+x^3\sin(\frac{1}{x})}{1+x^2+x^4}dx$$

Risulta $0 \le \frac{1}{1+x^3} \le x^{-3}$ e siccome le funzioni agli estremi sono sommabili, lo é per confronto la funzione in mezzo percui il primo integrale é sommabile. Risulta poi per $x \to \infty$

$$\frac{1+x^3\sin(\frac{1}{x})}{1+x^2+x^4} \approx \frac{x^3\sin(\frac{1}{x})}{x^4} = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} \approx \frac{1}{x^2}$$

quindi sommabile per confronto asintotico.

3) (8 punti) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di queste serie sono convergenti

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log(n^2+1)}$$

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}.$$

Abbiamo $\frac{1}{n\log(n^2+1)} \approx \frac{1}{n\log(n^2)} = \frac{1}{2n\log n}$ e $\frac{n^2+1}{n^3+1} \approx \frac{1}{n}$ in entrambi i casi per confronto asintotico le serie sono divergenti.

4) (6 punti) (6 punti) Calcolare il polinomio di Taylor $T_{2,0}(x)$, ossia il polinomio di Taylor di ordine 2 in 0, di $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 4.4.06.

1) (10 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}.$$

Inoltre stabilire quante sono le radici di $f(x)$.

2)(10 punti) Calcolare i limiti (5 punti ciascuno)

$$(a) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{e^x}}{x^x};$$

$$(b) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x \arctan\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)}{e^{\log\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}}.$$

3) (10 punti) Calcolare i seguenti integrali

$$\int \cos^6 x \, \sin^3 x \, dx$$

$$\int \arcsin x dx$$

$$\int \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}.$$

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 5.4.06.

1) (12 punti) Stabilire applicando gli opportuni confronti, quali di questi integrali sono convergenti

$$(a) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}\, dx$$

$$(b) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1+x+x^3}{1+x^2+x^4} dx$$

$$(c) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x^x}.$$

2) (12 punti) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di queste serie sono convergenti

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n\, n!}{(2n)!}$$

$$(c) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+1}.$$

3) (6 punti) Calcolare il polinomio di Taylor $T_{2,0}(x)$, ossia il polinomio di Taylor di ordine 2 in 0, di $f(x) = e^{x^2+x}$.

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, 12.1.06.

1) (12 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}.$$

In particolare stabilire il numero delle radici di $f(x)$ (ossia il numero delle soluzioni $f(x) = 0$).

2) (12 punti) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

(a)
$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\log x}{x}\right)^x$$

(b)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \sin x + (\log x)^2 + x + 1}{x + 1}$$

(c)
$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{x \sin \frac{1}{\sqrt{x}}}{1+x}}.$$

3) (6 punti) Verificare se la seguente funzione ha massimi e minimi assoluti e se li ha, determinarli: $f(x)$ definita in $[1, +\infty)$ da

$$f(x) = \frac{\sin(\log x)}{x}.$$

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione industriale, 15.12.05.

1) (10 punti) Calcolare i seguenti integrali

$$\int \cos^9 x \, \sin^2 x \, dx$$

$$\int x^2 \log x dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) (10 punti) Stabilire applicando gli opportuni confronti o eventualmente la definizione, quali di questi integrali sono convergenti e quali divergenti

(a)
$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2 \log\left(1+\frac{1}{x}\right)+1} \, dx$$

(b)
$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx$$

(c)
$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+x^2+x+1} dx.$$

3) (10 punti) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di queste serie sono convergenti

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)2^n}{(2n)!}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 13.12.06.

1) (8 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita, convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

2) (8 punti) Dimostrare che la funzione $f(x) = e^{-x} \log x$ ha almeno un punto di massimo assoluto in $[0, +\infty)$. Non occorre cercare questi punti di massimo in modo esplicito. Che dire di punti di minimo assoluto?

3) (6 punti, 3 ciascuno) Dimostrare se esistono o se non esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

(a)
$$\lim_{x \to +\infty} \left[x^2 \tan(1/x) \tanh(x) - x \right]$$

(b)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

4) (5 punti) Dimostrare dove é derivabile e dove non é derivabile la seguente funzione, e calcolarne la derivata nei punti dove é derivabile:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^3}} \text{ per } x > 1 \\ x \text{ per } 0 \leq x \leq 1 \\ e^{\frac{1}{x}} \text{ per } x < 0 \end{cases}$$

5) (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri per funzioni continue.

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 14.12.06.

1) (9 punti, 3 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

$$\int x^2 \cos x \sin x \, dx$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$
$$\int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

2) (6 punti, 3 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni confronti, quali di questi integrali sono convergenti

$$(a) \qquad \int_1^{+\infty} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \tan\left(\frac{1}{x}\right) \, dx$$
$$(b) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^3+x^4 e^{-x}} dx$$

3) (6 punti, 3 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di queste serie sono convergenti

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n+1)}$$
$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}.$$

4) (6 punti) Calcolare la serie di Taylor in 0 di $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

5) (3 punti) Enunciare il secondo ed il primo teorema fondamentale del calcolo. Non dare dimostrazioni.

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, esame straordinario 16.11.06, prima prova d'esame.

1) (10 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = x - 3x^{\frac{1}{3}}.$$

2) (10 punti) Stabilire dove la seguente funzione e' differenziabile e dove non lo e' calcolando il valore della derivata nei punti dove e' definita, e dimostrando l'inesistenza del limite dei rapporti incrementali dove non esiste:

$$f(x) = \begin{cases} x \quad \text{per } x \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{per } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ per } x \leq 0 \end{cases}$$

3) (10 punti, 5 ciascuno) stabilire se le seguenti funzioni hanno massimi e minimi assoluti:

(i) $f(x)$ definita in $[1, +\infty)$ da $f(x) = \frac{\log(x^2+1)}{1+x}$.

(ii) $f(x)$ definita in $[-1, 2]$ da $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 20.7.06.

1) (10 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

2) (10 punti) Verificare se esistono i limiti, e se esistono calcolarli:

(a)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^{n+5}\,(n!)}$$

(b)
$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^{x^2} - e^{(x-1)^2}\right)$$

(c)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{5}{2}}(\arctan x - \frac{\pi}{2}) + x\cos(x)}{x+\log(x)+1}.$$

3) (10 punti, 5 ciascuno) stabilire se le seguenti funzioni hanno massimi e minimi assoluti:

(i) $f(x)$ definita in $[1,+\infty)$ da $f(x) = \frac{\log x}{1+x}$.

(ii) $f(x)$ definita in $[-1,2]$ da $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 21.7.06.

1) (8 punti) Calcolare i seguenti integrali

$$\int x \sin^3(x)\cos^2 x\,dx$$
$$\int \frac{e^x + e^{3x}}{e^{2x} + e^{3x}}dx$$
$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

2) (8 punti) Stabilire applicando gli opportuni confronti, quali di questi integrali sono convergenti

(a)
$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)\,dx$$

(b)
$$\int_1^{+\infty} \frac{1 + x^3\cos(\frac{1}{x})}{1 + x^2 + x^4}dx$$

3) (8 punti) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di queste serie sono convergenti

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3+1}.$$

4) (6 punti) Calcolare il polinomio di Taylor $T_{2,0}(x)$, ossia il polinomio di Taylor di ordine 2 in 0, di $f(x) = \log(1 + x + x^2)$.

ANALISI Matematica 1. prova itinere 2 del 16.11.06. Argomentare le risposte

1) (10 punti) Stabilire dove la seguente funzione e' differenziabile e dove non lo e' calcolando il valore della derivata nei punti dove e' definita, e dimostrando l'inesistenza del limite dei rapporti incrementali dove non esiste:

$$f(x) = \begin{cases} x^{3x} & \text{per } x \geq 1 \\ x^3 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ e^{\frac{1}{x^3}} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

2) (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

3) (2 punti) Enunciare il teorema di Weierstrass per funzioni continue.

4) (15 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = x^4 - 3x^3.$$

ANALISI Matematica 1. prova itinere 2 del 16.11.06. Argomentare le risposte

1) (10 punti) Stabilire dove la seguente funzione e' differenziabile e dove non lo e' calcolando il valore della derivata nei punti dove e' definita, e dimostrando l'inesistenza del limite dei rapporti incrementali dove non esiste:

$$f(x) = \begin{cases} x^x & \text{per } x \geq 1 \\ \frac{x^2}{2} & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 1 + e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

2) (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle.

3) (2 punti) Enunciare il teorema di degli zeri per funzioni continue.

4) (15 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x - 2}.$$

ANALISI Matematica 1. prova itinere 2 del 16.11.06. Argomentare le risposte

1) (10 punti) Stabilire dove la seguente funzione e' differenziabile e dove non lo e' calcolando il valore della derivata nei punti dove e' definita, e dimostrando l'inesistenza del limite dei rapporti incrementali dove non esiste:

$$f(x) = \begin{cases} x \quad \text{per } x \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{per } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ per } x \leq 0 \end{cases}$$

2) (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di caratterizzazione tramite la derivata delle funzioni costanti.

3) (2 punti) Enunciare le tre regole dell Hopital.

4) (15 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = x - 3x^{\frac{1}{3}}.$$

ANALISI Matematica 1. prova itinere 3 del 28.11.06. Argomentare le risposte

1) (12 punti, 3 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \qquad \int \cos^2 x \, \sin^3 x \, dx$$

$$(b) \qquad \int \arcsin x dx$$

$$(c) \qquad \int \frac{x}{(x-1)(x-2)}$$

$$(d) \qquad \int_0^\pi e^x \sin^2(x) \, dx.$$

2) (3 punti) Enunciare e dimostrare il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo.

3) (3 punti) Dimostrare che una successione convergente é una successione di Cauchy.

4) (6 punti, 3 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni confronti, quali di questi integrali sono convergenti e quali no

$$(a) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2+x^4} dx$$

$$(b) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x^3} \, dx$$

5) (6 punti, 3 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, se le seguenti serie sono convergenti, assolutamente convergenti, divergenti, irregolari

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+n^{-2})$$

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3+1}{n^3+n^2+n+1},$$

ANALISI Matematica 1. prova itinere 3 del 28.11.06. Argomentare le risposte

1) (12 punti, 3 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

(a) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x}\, dx$$

(b) $$\int x \arctan x dx$$

(c) $$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x+1)}$$

(d) $$\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^x + 1}\, dx.$$

2) (3 punti) Dare la definizione di polinomi di Taylor ed enunciare le formule per il resto di Peano e di Lagrange.

3) (3 punti) Dimostrare che condizione necessaria per la convergenza di una serie $\sum a_n$ é che $\lim a_n = 0$. Con un esempio mostrare che la condizione non é sufficiente.

4) (6 punti, 3 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni confronti, quali di questi integrali sono convergenti e quali no

(a) $$\int_1^{+\infty} (x^{12} + x^7 + x + 1)e^{-x} dx$$

(b) $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\log^3 x}\, dx$$

5) (6 punti, 3 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, se le seguenti serie sono convergenti, assolutamente convergenti, divergenti, irregolari

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{e^n}$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \frac{1}{n^2+n+1},$$

ANALISI Matematica 1. prova itinere 3 del 28.11.06. Argomentare le risposte

1) (12 punti, 3 ciascuno) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \qquad \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

$$(b) \qquad \int x\log(x)\,dx$$

$$(c) \qquad \int \sqrt{1-x^2}$$

$$(d) \qquad \int \cosh^3(x)\sqrt{\sinh(x)+1}\,dx.$$

2) (3 punti) Dimostrare il Primo Teorema Fondamentale del Calcolo.

3) (3 punti) Dimostrare che una serie assolutamente convergente é convergente.

4) (6 punti, 3 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni confronti, quali di questi integrali sono convergenti e quali no

$$(a) \qquad \int_1^{+\infty} e^{-x}\sin(x)\arctan(x)(x^2+1)dx$$

$$(b) \qquad \int_2^{+\infty} \log(1+x^{-2})\,dx$$

5) (6 punti, 3 ciascuno) Stabilire applicando gli opportuni criteri, se le seguenti serie sono convergenti, assolutamente convergenti, divergenti, irregolari

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\log(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$$

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right),$$

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 14.7.05.

1) (8 punti) Trovare per $x \in \mathbb{R}$ massimi e minimi assoluti e relativi, concavita convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = x^3 + x^2 + x.$$

2) (6 punti) Calcolare $f'(x)$ nei due casi

$$f(x) = \sqrt{x^x}\,, \quad f(x) = x^2 \ln|\ln|x||.$$

3) (16 punti) Calcolare gli integrali

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(x-1)(x-2)}$$
$$\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx.$$

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 15.7.05.
1) Trovare l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente serie é convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{2x+1} \right)^n .$$

2) Calcolare i seguenti limiti se esistono, o verificare che non esistono

$$\lim_{x \to 0^+} x^x \, , \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cos x + 1}{x+1} .$$

Inoltre enunciare la regola dell' Hopital.

3)Enunciare il (primo e secondo) Teorema fondamentale del calcolo. Poi trovare punti di massimo e di minimo in $[0, 1]$ della seguente funzione (non tentare di integrare) $f(x)$:

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} (t-1) dt.$$

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 15.12.05.

1) (10 punti) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi, concavita convessita, flessi e tracciare il grafico di

$$f(x) = \frac{x^2+1}{1-x}.$$

2) (5 punti) Trovare per ciascun $x > 0$, motivando la risposta,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

3) (5 punti) Trovare massimi e minimi della seguente funzione $f(x)$ definita in $[0,1]$

$$f(x) = x^3 - x^2 - x.$$

4) (10 punti) Calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, \sin^2 x \, dx$$

$$\int x^2 \arctan x dx$$

$$\int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 15.12.05.

1) (10 punti) Stabilire applicando gli opportuni confronti o eventualmente la definizione, quali di questi integrali sono convergenti

(a)
$$\int_{e^{\frac{2}{\pi}}}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^{\frac{3}{2}}\sin(\frac{1}{\log x})+x}}\,dx$$

(b)
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$$

(c)
$$\int_5^{+\infty} \frac{x(\log x)^{10}}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

2) (10 punti) Stabilire applicando gli opportuni criteri, quali di queste serie sono convergenti

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n^2}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^4+n^2+1}.$$

3) (10 punti) Calcolare il polinomio di Taylor $T_{1,0}(x)$, ossia il polinomio di Taylor di ordine 1 in 0, di $f(x) = \log(\log(2+x))$. Poi stimare con una costante l'errore

$$\left|f(\frac{1}{2}) - T_{1,0}(\frac{1}{2})\right|.$$

ANALISI 1 prova itinere 3.

1) (10 punti)Decidere quali di questi integrali generalizzati sono convergenti, utilizzando in modo appropriato un metodo di confronto:

$$(a) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,(1-\arctan x)\,dx$$

$$(b) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\left(\log(1+\frac{1}{x})\right)dx$$

$$(c) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2+x^4}dx.$$

2) (10 punti) Determinare esattamente l'insieme degli x tali che la seguente serie converge, spiegando perché per ciascun dato x la serie converge o non converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^{n^2}.$$

3)(8 punti) Per $f(x) = \tan x$ calcolare il polinomio di Taylor $T_{2,0}(x)$, il polinomio di Taylor di ordine 2 in $x_0 = 0$. Per $x = \frac{\pi}{4}$ applicando la stima dell'errore di Lagrange stimare l'errore $|f(1) - T_{2,0}(1)|$.

4)(2 punti) Scrivere perché, data una funzione continua $f(x)$ su $\mathbb{R}$ la quale possegga la proprietá che $\lim_{\to+\infty} f(x) = \lim_{\to-\infty} f(x) = 0$ e tale che $f(0) > 0$ allora la funzione ammette un punto di massimo assoluto in $\mathbb{R}$. Scrivere in modo quanto piú rigoroso possibile (e senza troppe chiacchere), utilizzando e dando per noti gli opportuni teoremi sulle funzioni continue.

ANALISI 1 prova itinere 3.

1) (10 punti)Decidere quali di questi integrali generalizzati sono convergenti, utilizzando in modo appropriato un metodo di confronto:

$$(a) \qquad \int_1^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$(b) \qquad \int_1^{+\infty} \sin\left(e^{-x}\right) dx$$

$$(c) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(e^{-x^3}\right)}{1-\tanh x} dx.$$

2) (10 punti) Determinare esattamente l'insieme degli x tali che la seguente serie converge, spiegando perché per ciascun dato x la serie converge o non converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

3)(8 punti) Per $f(x) = xe^x$ calcolare il polinomio di Taylor $T_{2,0}(x)$, il polinomio di Taylor di ordine 2 in $x_0 = 0$. Per $x = 1$ applicando la stima dell'errore di Lagrange stimare l'errore $|f(1) - T_{2,0}(1)|$.

4)(2 punti) Scrivere perché, data una funzione continua $f(x)$ su $\mathbb{R}$ la quale possegga la proprietá che $\lim_{\to+\infty} f(x) = \lim_{\to-\infty} f(x) = 0$ e tale che $f(0) > 0$ allora la funzione ammette un punto di massimo assoluto in $\mathbb{R}$. Scrivere in modo quanto piú rigoroso possibile (e senza troppe chiacchere), utilizzando e dando per noti gli opportuni teoremi sulle funzioni continue.

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 5.9.05.

1) (8 punti) Trovare per $x \in \mathbb{R}$ massimi e minimi assoluti e relativi, e tracciare il grafico di

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

2) (6 punti) Verificare se la seguente funzione $f(x)$ é differenziabile in ogni punto e calcolarne la derivata laddove essa esiste.

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{se} \quad x > 0$$
$$f(x) = 0 \quad \text{se} \quad x \leq 0.$$

3) (16 punti) Calcolare gli integrali

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x-1)(x-2)}$$
$$\int_1^2 x \arctan x \, dx$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx$$
$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1+x^{\frac{1}{2}}} dx.$$

Analisi 1 Integrazione Impresa & Gestione indistriale, 6.9.05.

1) Verificare se la seguente serie é convergente. Enunciare in dettaglio il criterio di convergenza usato:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+n\arctan n+1}{2n+1}\right)^{n}.$$

2) Calcolare i seguenti limiti se esistono, o verificare che non esistono

$$\lim_{x\to+\infty} x^{e^{\frac{1}{x}}-1}, \quad \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\sin(\frac{1}{x})-x\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left(\arctan(x)-\frac{\pi}{2}\right)-x\right).$$

3)Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{-t^2}dt}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \log t dt}{x\log x}.$$