Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 7

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Dimostrare che uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se la *diagonale*
$$\Delta := \{(x,x) \mid x \in X\} \subset X \times X$$
è chiusa in $X \times X$.

2) Siano $f, g \colon X \to Y$ continue e Y di Hausdorff. Dimostrare che
$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
è chiuso in X.

3) Consideriamo una famiglia di spazi $\{X_i\}_{i \in I}$ e sia $A_i \subset X_i$ chiuso in X_i $\forall\, i \in I$. Dimostrare che $\prod_{i \in I} A_i$ è chiuso in $\prod_{i \in I} X_i$.

4) Scrivere le formule per la proiezione stereografica s_- dal punto $a_- = (0, \dots, 0, -1)$, e per la sua inversa.

5) Sia $f \colon R^n \to R$ continua. Dimostrare che f è propria $\Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

6) Dimostrare che i polinomi reali in una variabile non costanti sono funzioni proprie.

7) Capire le compattificazioni di Alexandrov dei seguenti spazi:
(a) $]0, +\infty[$ (b) $[0, +\infty[$ (c) C^n, $n \geq 1$ (d) $R \sqcup R$
(e) $X = \{(x,y) \in R^2 \mid xy = 0\}$
(f) $R^n_+ := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n \geq 0\}$, $n \geq 1$

8) Sia $H = \{(x,y) \in R^2 \mid xy = 1\} \subset R^2$. Dimostrare che $H \cong R \sqcup R$.

9) Sia $S = \{(x,y) \in R^2 \mid y = x^3\}$. Determinare un omeomorfismo di R^2 che manda l'asse x su S.

10) Dimostrare che la retta di Sorgenfrey non è localmente compatta.

11) Sia $L \subset R^3$ una retta affine. Dimostrare che $R^3 - L \cong (R^2 - \{0\}) \times R$.

12) Siano $L, T \subset R^3$ rette sghembe. Dimostrare che esiste un omeomorfismo di R^3 che manda L e T in due rette parallele.