Tutorato Analisi 1 M-Z
Esercitazione 5 - 13/11/2023

Clemente Romano

13 novembre 2023

1. Dimostrare che $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^2}=+\infty$ e che $\lim_{x\to-\infty}x^2a^x=0$ senza usare la gerarchia degli infiniti[1]

2. Usando quando necessario il limite notevole del seno $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x}\qquad \lim_{x\to\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)^2}{\sin(x^4)}\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$$

3. 14/6/2022
Si studi la funzione
$$f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1)$$
determinando
(i) Dominio
(ii) segno
(iii) limiti agli estremi del dominio
(iv) al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ quante soluzioni ha l'equazione
$$\ln(e^{2x}-e^x+1)=\alpha$$

4. Determinare l'insieme in cui sono definite le seguenti funzioni

i)
$$f(x)=\arctan(x)$$
ii)
$$f(x)=x^{\sqrt{2}}$$
iii)
$$f(x)=x^{1/3}$$
iv)
$$f(x)=\log_{1/2}(x^2-16)$$
v)
$$f(x)=\sqrt{\log_{1/2}(1+x)}$$
vi)
$$\sqrt{\log_{1/2}\left(\arctan\left(\frac{x-\pi}{x-4}\right)\right)}$$
vii)
$$\arctan\left(\sqrt{\frac{|x^2-2|+1}{x^2-1}}\right)$$

5. Stabilire se i seguenti limiti (alcuni dei quali tratti da vecchi temi d'esame) esistono e, in caso affermativo, calcolarne il risultato.

i)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{30}-x^{29}}{x^{31}-x^{30}-x^{29}-x^7}$$
ii)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{14}-x^{13}}{\sqrt{((x^2-x)^3-x^5)^5-x^{29}}-x^{14}}$$

[1] hint : si usi la disuguaglianza di Bernoulli oppure il teorema del binomio

iii)
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - x^2 + x^3 - x^5 - x^{30}}{x^2 - x^3 - x^7 - x^{30}}$$

iv)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(x) - \pi/2}{1/x}$$

v) 24/1/2023
$$\lim_{x\to -3\pi^+} (x + 3\pi)\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

vi)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x) - 1}{x^2}$$

[2]

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1 + \sin^2(x)}{1 - x}\right)^{\frac{1}{\tan(x)}}$$

vii) 14/6/2022
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(3 + \cos(x))}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{3^x - 4^x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x + (x+1)\ln(1-x)}{x^2} \qquad \lim_{x\to +\infty} x(x - \sqrt{x^2+1})$$

si ricorda che per definizione $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$, $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$, $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$

[2] può essere utile l'equazione $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Email: clemente.romano@sissa.it