Spazio quoziente

X spazio topologico, $\sim$ relazione d'equivalenza su $X \rightsquigarrow$

$$[x] \overset{\text{def}}{=} \{y \in X \mid y \sim x\} \qquad \textit{classe d'equivalenza di } x \in X$$

$$X/\!\sim\ \overset{\text{def}}{=} \{[x] \mid x \in X\} \qquad \textit{insieme quoziente}$$

$$\pi : X \to X/\!\sim \qquad \textit{applicazione quoziente}$$

$$\pi(x) = [x]$$

Definiamo una topologia su $X/\!\sim$ dichiarando gli aperti: $\forall\, V \subset X/\!\sim$

$$V \text{ aperto in } X/\!\sim\ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \pi^{-1}(V) \text{ aperto in } X.$$

È una topologia perché le preimmagini preservano unioni e intersezioni:

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(V_i)$$

$$\pi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \pi^{-1}(V_1) \cap \pi^{-1}(V_2).$$

Def. Questa topologia si chiama *topologia quoziente*. L'insieme quoziente $X/\!\sim$ munito della topologia quoziente è detto *spazio quoziente*.

Oss. L'applicazione quoziente $\pi : X \to X/\!\sim$ è continua e suriettiva.

Oss. X compatto $\Rightarrow X/\!\sim$ compatto.

N. B. Spesso dichiareremo le equivalenze non banali sugli spazi, e intenderemo la relazione d'equivalenza generata da tali relazioni.

Esempio. *Retta con due origini.* Su $\mathbf{R} \times \{0, 1\}$ definiamo

$$(x, 0) \sim (x, 1) \quad \forall\, x \in \mathbf{R} - \{0\}.$$

$(0, 0)$ e $(0, 1)$ non sono identificati. Ogni intorno di $[(0, 0)]$ interseca ogni intorno di $[(0, 1)]$, quindi la retta con due origini non è di Hausdorff.

Teor. *$f : X/\!\sim\ \to Y$ continua $\Leftrightarrow f \circ \pi : X \to Y$ continua.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Banale.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, V \subset Y$ aperto $\Rightarrow \pi^{-1}(f^{-1}(V)) = (f \circ \pi)^{-1}(V) \subset X$ aperto $\Rightarrow$ $f^{-1}(V) \subset X$ aperto $\Rightarrow f$ continua. $\square$

Oss. $f : Y \to X/\!\sim$ continua *se* $\exists\, \tilde{f} : Y \to X$ continua t.c. $f = \pi \circ \tilde{f}$.

Def. $f : X \to Y \rightsquigarrow \sim_f$: $\forall\, x_1, x_2 \in X$, $x_1 \sim_f x_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(x_1) = f(x_2)$ *relazione d'equivalenza indotta da* f.

Oss. $f : X \to Y$ continua $\rightsquigarrow \bar{f} : X/\!\sim_f\ \to Y$, $\bar{f}([x]) := f(x)$ ben definita, continua e iniettiva, infatti $f = \bar{f} \circ \pi$. $\bar{f}$ si chiama f *passata al quoziente*.

Oss. $f : X \to Y$ continua, $X/\sim_f$ compatto e Y di Hausdorff $\Rightarrow$ $\bar{f} : X/\sim_f \to Y$ immersione ($\bar{f}$ omeo se f suriettiva).

Def. $A \subset X \rightsquigarrow X/A \overset{\text{def}}{=} X/(a_1 \sim a_2, \forall\, a_1, a_2 \in A)$. $A \in X/A$ è un punto.

Esempio. $[0,1]/\{0,1\} = [0,1]/(0 \sim 1) \cong S^1$

$$f : [0,1] \to S^1, \quad f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

identifica 0 e 1 $\Rightarrow \bar{f} : [0,1]/\{0,1\} \to S^1$ omeo.

Esempio. $B^n/S^{n-1} \cong S^n$ indotto da

$$f : B^n \to S^n, \quad f(x) = \left(\sin(\pi\|x\|)\frac{x}{\|x\|}, \cos(\pi\|x\|)\right)$$

Spazi proiettivi

Caso reale. $\sim$ relazione di proporzionalità: $\forall\, x, y \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \lambda \in \mathbf{R} - \{0\} \text{ t.c. } x = \lambda y$$

$$\mathbf{RP}^n \overset{\text{def}}{=} (\mathbf{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$$

con la topologia quoziente è detto *spazio proiettivo reale di dimensione* n. $\mathbf{RP}^1$ *retta proiettiva reale*. $\mathbf{RP}^2$ *piano proiettivo reale*.

$$\pi : \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{RP}^n, \quad \pi(x) = [x] \quad \text{continua e suriettiva.}$$

$[x] = [x_0, \ldots, x_n] \in \mathbf{RP}^n$ *coordinate omogenee* (non tutte nulle).

$\forall\, x \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \Rightarrow [x] = \left[\frac{x}{\|x\|}\right] \in \mathbf{RP}^n \Rightarrow \pi|_{S^n} : S^n \to \mathbf{RP}^n$ continua e suriettiva $\Rightarrow \mathbf{RP}^n$ compatto.

Immersione in $\mathbf{R}^N$. $\forall\, i, j \in \{0, \ldots, n\} \rightsquigarrow$

$$\varphi_{ij} : \mathbf{RP}^n \to \mathbf{R}$$

$$\varphi_{ij}([x_0, \ldots, x_n]) := \frac{x_i x_j}{x_0^2 + \cdots + x_n^2}$$

ben definita e continua, dato che $\varphi_{ij} \circ \pi$ continua. Si vede facilmente che

$$\varphi_{ij}([x]) = \varphi_{ij}([y]), \ \forall\, i, j \in \{0, \ldots, n\} \ \Rightarrow \ [x] = [y].$$

$\varphi : \mathbf{RP}^n \to \mathbf{R}^N$ con componenti le φ_{ij} (in un certo ordine) è continua e iniettiva da compatto ad Hausdorff $\Rightarrow \varphi$ immersione $\Rightarrow \mathbf{RP}^n$ metrizzabile.

Caso complesso. $\sim$ relazione di proporzionalità: $\forall\, x, y \in \mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \lambda \in \mathbf{C} - \{0\} \text{ t.c. } x = \lambda y$$

$$\mathbf{CP}^n \overset{\text{def}}{=} (\mathbf{C}^{n+1} - \{0\})/\sim$$

con la topologia quoziente è detto *spazio proiettivo complesso di dim* n.
$\mathbf{CP}^1$ *retta proiettiva complessa*. $\mathbf{CP}^2$ *piano proiettivo complesso*.

$$\pi : \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{CP}^n, \quad \pi(x) = [x] \quad \text{continua e suriettiva.}$$

$$[x] = [x_0, \dots, x_n] \in \mathbf{CP}^n \quad \textit{coordinate omogenee} \text{ (non tutte nulle).}$$

$\forall\, x \in \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \Rightarrow [x] = \left[\frac{x}{\|x\|}\right] \in \mathbf{CP}^n \Rightarrow \pi|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \to \mathbf{CP}^n$ continua e suriettiva $\Rightarrow \mathbf{CP}^n$ compatto.

Immersione in $\mathbf{C}^N$. $\forall\, i, j \in \{0, \dots, n\} \rightsquigarrow$

$$\varphi_{ij} : \mathbf{CP}^n \to \mathbf{C}$$

$$\varphi_{ij}([x_0, \dots, x_n]) := \frac{x_i \bar{x}_j}{|x_0|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

ben definita e continua, dato che $\varphi_{ij} \circ \pi$ continua. Si vede facilmente che

$$\varphi_{ij}([x]) = \varphi_{ij}([y]),\ \forall\, i, j \in \{0, \dots, n\} \ \Rightarrow\ [x] = [y].$$

$\varphi : \mathbf{CP}^n \to \mathbf{C}^N$ con componenti le φ_{ij} (in un certo ordine) è continua e iniettiva da compatto ad Hausdorff $\Rightarrow \varphi$ immersione $\Rightarrow \mathbf{CP}^n$ metrizzabile.