Istituzioni di Algebra e Geometria
Secondo foglio di esercizi

13 novembre 2023

1. Si dimostri che se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ è un campo algebricamente chiuso e $g(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ è un polinomio non costante (risp. $G(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ è un polinomio omogeneo non costante), allora l'insieme degli zeri $Z(g) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ ha infiniti punti (risp. $Z_P(G) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ ha infiniti punti).

2. Si dimostri che se $F = F_1 F_2 \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ è un polinomio omogeneo non costante, allora i punti di $Z_P(F_1) \cap Z_P(F_2)$ sono singolari per $Z_P(F) \subset \mathbb{P}^2$.

3. Si trovino due coniche proiettive irriducibili che verifichino le seguenti condizioni, si calcoli il loro risultante (usando un programma di calcolo simbolico) e si verifichi la validità delle condizioni sulle intersezioni:
   (a) passanti per i punti $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (1 : 0 : 1)$, $C = (1 : 1 : 0)$, $D = (1 : 1 : 1)$;
   (b) passanti per i punti $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (1 : 0 : 1)$, $C = (1 : 1 : 0)$, e tangenti in C;
   (c) passanti per i punti $A = (1 : 0 : 0)$ e $B = (1 : 0 : 1)$, e tangenti in entrambi i punti;
   (d) passanti per i punti $A = (1 : 0 : 0)$ e $B = (1 : 0 : 1)$, e aventi molteplicità di intersezione 3 in A;
   (e) passanti per $B(1 : 0 : 1)$ e aventi molteplicità di intersezione 4 in B.

4.
   - Si consideri la conica $C = (Z_P(F), F)$ con $F = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, e sia $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ la generica retta del piano proiettivo. Usando la teoria del risultante (e un programma di calcolo simbolico), si trovino le condizioni su a, b, c affinché la retta corrispondente sia tangente a C in qualche punto.
   - Si consideri la cubica di Fermat $D = (Z_P(G), G)$ con $G = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, e sia $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ la generica retta del piano proiettivo. Usando la teoria del risultante (e un programma di calcolo simbolico), si trovino le condizioni su a, b, c affinché la retta corrispondente sia tangente a D in qualche punto.