13 Novembre

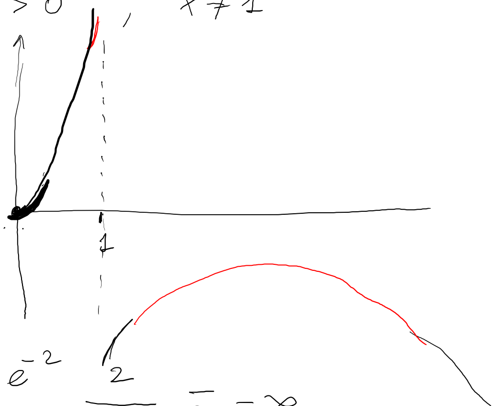
Da un esame del 13 febbraio 23 N. 3

$$f(x) = e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}} \, \frac{1+x^2}{1-x}$$

1) Dom f $\quad x > 0 , \quad x \neq 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}}_{\downarrow\ 1} \frac{1+x^2}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$$



$$\lim_{x\to1^+} e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}} \frac{1+x^2}{1-x} = \lim_{x\to1^+} e^{-2} \frac{2}{1-\cancel{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} e^{-2} \frac{2}{1-x} = +\infty$$

$$y = -\frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to0^+} e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}} \frac{1+x^2}{1-x} = \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}} = \lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0$$

$$= \inf (0,+\infty)$$

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}} \, \frac{1+x^2}{1-x} \right)' =$$

$$= e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}} \left[\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)' \frac{1+x^2}{1-x} + \left(\frac{1+x^2}{1-x} \right)' \right]$$

$$= e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}} \left[\cancel{-2} \left(\cancel{-\frac{1}{2}}\right) x^{-\frac{3}{2}} \, \frac{1+x^2}{1-x} + \frac{2x(1-x) + (1+x^2)}{(1-x)^2} \right]$$

$$= \frac{e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}}{1-x} \left[\frac{1+x^2}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{-x^2+2x+1}{1-x} \right]$$

$$= \frac{e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}}{(1-x)^2 x^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[(1+x^2)(1-x) + x^{\frac{3}{2}} (-x^2+2x+1) \right]$$

$$= \frac{e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}}{(1-x)^2 x^{\frac{3}{2}}} \left[-x^{\frac{7}{2}} - x^3 + 2x^{\frac{5}{2}} + x^2 + x^{\frac{3}{2}} - x + 1 \right]$$

Non riusciamo facilmente a trovare gli zeri di $f'(x)$

Verifichiamo che $f'(x) \geq 0$ per $0 < x < 1$

Possiamo scrivere che per $0 < x < 1$

$$x^{\frac{7}{2}} < x^2 \iff -x^{\frac{7}{2}} + x^2 > 0$$

$$x^3 < x^{\frac{3}{2}} \iff -x^3 + x^{\frac{3}{2}} > 0$$

$$\Rightarrow -x^{\frac{7}{2}} - x^3 + 2x^{\frac{5}{2}} + x^2 + x^{\frac{3}{2}} - x + 1 > 2x^{\frac{5}{2}} - x + 1 > -x + 1 > 0$$

per $0 < x < 1$

$$\Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall \; 0 < x < 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}}{x^{\frac{3}{2}} \cancel{(1-x)^2}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{e^{-2y}}{\frac{1}{y^3}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^3}{e^{2y}} = 0$$

Verifichiamo se c'è una retta asintotica a $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \cancel{e^{-\frac{2}{x}}} \frac{1+x^2}{1-x} \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$y = -x + c$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x) - mx - c}{x}\right] = 0 \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \right)$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty} [f(x) + x - c] = 0 \iff \lim_{x\to+\infty} (f(x)+x) = c \right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}} \frac{1+x^2}{1-x} + x \right]$$

$$e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}} \frac{1+x^2}{1-x} + x = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) \frac{1+x^2}{1-x} + x =$$

$$y = -\frac{2}{\sqrt{x}} \qquad e^y = 1 + y + o(y) \qquad -2\, x^\alpha\, o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$$

Data una f

$$f'(x_0) = c \iff f(x) = c(x-x_0) + o(x-x_0) + f(x_0)$$

$$= \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) \frac{x^2}{-x} \frac{1+x^{-2}}{1-\frac{1}{x}} + x$$

$-x$

$$= \left(-x + \boxed{2\sqrt{x}} + o(\sqrt{x})\right) \frac{1+x^{-2}}{1-\frac{1}{x}} + x \longrightarrow +\infty$$

Regole dell' Hôpital   Riguardano limiti $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\frac{0}{0}$ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

due regole $\frac{0}{0}$

$\frac{\infty}{\infty}$

Teo (Prima regola) Siano f, g definite in $[a,b]$ e $x_0 \in [a,b]$.
Supponiamo che esistono $f'(x_0)$, $g'(x_0)$ ~~con~~ $g'(x_0) \neq 0$
e che $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Osservazione Ricordiamo che
$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$
$$g(x) = \underset{\neq 0}{g'(x_0)}(x-x_0) + o(x-x_0)$$

Pertanto quando $x \neq x_0$ è sufficientemente vicino a x
risulta che $g(x) \neq 0$
$$g(x) = g'(x_0)(x-x_0)\left[1 + \frac{o(x-x_0)}{g'(x_0)(x-x_0)}\right]$$
$$g(x) = g'(x_0)(x-x_0)\left[1 + o(1)\right]$$

Dim
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - \overbrace{f(x_0)}^{=0}}{g(x) - \underbrace{g(x_0)}_{0}} = \frac{\overbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}^{\to f'(x_0)}}{\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\to g'(x_0)}}$$

Es $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\cos(0)}{1} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x) - 2x}{\sin x} = -1$ $(\sin x)' = \cos x\big|_{x=0} = 1$

$(\lg(1+x) - 2x)' = \frac{1}{1+x} - 2\big|_{x=0} = -1$

Lemma (Teorema di Cauchy) Siano $f, g \in C^0([a,b])$ e differenziabili in (a,b). Sia inoltre $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Allora $\exists \ c \in (a,b)$ t.c.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = \underset{\neq 0}{g'(c_1)}$$

Osservazione 1 Nel caso $g(x) = x$ questo è il teorema di Lagrange

Osservazione 2 Le frazioni sono ben definite perchè per Lagrange

$\exists \ c_1 \in (a,b)$ t.c. $g(b)-g(a) = \underbrace{(b-a)}_{\neq 0} \underbrace{g'(c_1)}_{\neq 0}$

Teor (2° regola Hôpital, $\frac{0}{0}$) Sia I un intervallo e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ~~che~~ un punto di accumulazione di I

Siano $f, g : I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $I \setminus \{x_0\}$ con $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$. Sia inoltre

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Allora se esiste

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L .$$