

Speranza Matematica

Speranza Matematica

- X va su uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) ; vogliamo definire

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$$

- ▶ **valor medio/atteso** di X
- ▶ **speranza matematica** di X
- ▶ **baricentro** di X
- ▶ **integrale astratto** di X rispetto a P su Ω

Speranza Matematica

- (Ω, \mathcal{F}, P) spazio di probabilità, X va **semplice**,

$$X = \sum_{i=1}^m c_i 1_{A_i}$$

con $c_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, m$; si definisce

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP = \sum_{i=1}^m c_i P(A_i) \in \mathbb{R}$$

- ▶ non dipende dalla rappresentazione di X

Speranza Matematica

- (Ω, \mathcal{F}, P) spazio di probabilità, X va **semplice**,
- Esempio.

▶ $X = c$ q.c. (degenere), $E[X] = c$

▶ $X \sim \text{Bernoulli}(p)$,

$$E[X] = p = P(A)$$

▶ X con valori x_1, \dots, x_n e masse p_1, \dots, p_n

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

▶ $X \sim \text{Binomiale}(n, p)$

$$X = 1_{E_1} + \dots + 1_{E_n}$$

con (E_i) indipendenti e $P(E_i) = p$

$$E[X] = np$$

Speranza Matematica

- (Ω, \mathcal{F}, P) spazio di probabilità, X va **nonnegativa**, $X \geq 0$; si definisce

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\Omega} X dP \\ &= \sup\{E[Y] \mid Y \text{ va semplice, } 0 \leq Y \leq X\} \in [0, +\infty] \end{aligned}$$

$E[X] = +\infty$ è possibile!

- $X_1, X_2 \geq 0$ va; si può provare che
 - ▶ se $X_1 \leq X_2$ allora $0 \leq E[X_1] \leq E[X_2]$
 - ▶ $E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$
 - ▶ se $X_1 \leq K$ con $K > 0$, allora $E[X] < +\infty$

Speranza Matematica

- Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si pone

$$x^+ = \max\{x, 0\},$$

$$x^- = \max\{-x, 0\},$$

parte positiva di x

parte negativa di x

e riesce

- ▶ $x^+, x^- \geq 0$
- ▶ $x = x^+ - x^-, |x| = x^+ + x^-$
- ▶ $x^+ \leq |x|, x^- \leq |x|$

Speranza Matematica

- (Ω, \mathcal{F}, P) spazio di probabilità, X va (qualunque); X è integrabile se

$$E[|X|] < +\infty \Leftrightarrow E[X^+] < +\infty, E[X^-] < +\infty$$

in questo caso si definisce

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP = E[X^+] - E[X^-] \in \mathbb{R}$$

- Per ogni $p \geq 1$

$$L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{X \text{ va su } (\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ con } E[|X|^p] < +\infty\}$$

L^p : va p -integrabili

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica

- ▶ [Linearità]: L^p è uno spazio vettoriale;
per ogni $X, Y \in L^1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y], \quad E[\alpha X] = \alpha E[X]$$

- ▶ [Monotonia], $X, Y \in L^1$, $X \leq Y$ q.c.,

$$E[X] \leq E[Y]$$

- ▶ se X è dominata, $|X| \leq Y$ q.c. con $Y \in L^1$ allora $X \in L^1$
- ▶ se $1 \leq p < q$ allora $L^q \subset L^p$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica

- ▶ se $X = 0$ q.c., allora $X \in L^1$ e $E[X] = 0$

- ▶ se $A \in \mathcal{F}$, $\Pr(A) = 0$, allora $X1_A \in L^1$ e $E[X1_A] = 0$

- ▶ se $X \geq 0$ q.c. allora $E[X] \geq 0$

inoltre,

$$E[X] = 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ q.c.}$$

oppure

$$E[X] > 0 \Leftrightarrow P(X > 0) > 0$$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica

▶ [Integrazione rispetto alla misura immagine (I)]:

$$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \Leftrightarrow f(x) = x \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$$

e in questo caso

$$E[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x)$$

notazione alternativa (F_X è la cdf di X):

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x)$$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica
 - ▶ [Integrazione rispetto alla misura immagine (II)]: X va, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile

$$g(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \Leftrightarrow g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$$

e in questo caso

$$E[g(X)] = \int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X(x)$$

notazione alternativa (F_X è la cdf di X):

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_X(x)$$

- Basta usare la legge di X , non serve quella di $g(X)$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica

- ▶ [Caso discreto] X va discreta con valori x_1, \dots, x_n, \dots e masse p_1, \dots, p_n, \dots

$$X \in L^1 \Leftrightarrow \sum_{i \geq 1} |x_i| p_i < +\infty$$

e in questo caso

$$E[X] = \sum_{i \geq 1} x_i p_i$$

se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile con $g(X) \in L^1$,

$$E[g(X)] = \sum_{i \geq 1} g(x_i) p_i$$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica

▶ [Caso continuo] X va continua con pdf f_X

$$X \in L^1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f_X(x)dx < +\infty$$

e in questo caso

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$$

se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile con $g(X) \in L^1$,

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica

- ▶ [Caso misto (I)] Se Y è mistura di $X_1, X_2 \in L^1$,

$$F_Y = \lambda F_{X_1} + (1 - \lambda) F_{X_2}$$

allora $Y \in L^1$ e

$$E[Y] = \lambda E[X_1] + (1 - \lambda) E[X_2]$$

- ▶ [Caso misto (II)] se X ha parte discreta con valori x_1, \dots, x_n, \dots e masse p_1, \dots, p_n, \dots e parte continua con “densità” $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, allora

$$E[X] = \sum_{i \geq 1} x_i p_i + \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Speranza Matematica

- Possibili estensioni

- ▶ tutte le proprietà viste continuano a valere per X nonnegative (anche se non integrabili), con ovvi aggiustamenti
- ▶ si può definire la speranza matematica di X in generale anche se non integrabile, se una delle due speranze

$$E[X^+], \quad E[X^-]$$

è finita; le proprietà viste continuano a valere, con ovvi aggiustamenti

- ▶ anche se $X \in \overline{\mathbb{R}}$ ha senso definire $E[X] \in \overline{\mathbb{R}}$, a meno che non sia $P(X = +\infty) > 0$, $P(X = -\infty) > 0$; se $E[|X|] < +\infty$ allora X è finita q.c.

Speranza Matematica

- Esercizio.

- ▶ $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$E[X] = \lambda$$

- ▶ $X \sim U(a, b)$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

- ▶ $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$

$$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$$

- ▶ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$E[X] = \mu$$

- ▶ X ha distribuzione di **Cauchy** se la pdf è

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

speranza matematica **non definita**

Speranza Matematica

- Alcune trasformate di una va X
 - ▶ $E[X^p], E[|X|^p]$ **momenti e momenti assoluti** di ordine $p > 0$ ($X \in L^p$)
 - ▶ $E[(X - E[X])^p]$ **momenti centrali** di ordine $p > 0$ ($X \in L^p$)
- La distribuzione determina i momenti, **ma non viceversa** (**problema dei momenti**); esempio: distribuzione lognormale

Speranza Matematica

- Alcune trasformate di una va X
 - ▶ **funzione generatrice dei momenti**

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

$M_X : I \rightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo contenente 0;

se $M_X(t) = M_Y(t)$ per ogni t in un intorno (non degenere) di 0,
allora $X \sim Y$;

se $X \in L^n$ allora $M_X^{(n)}(0) = E[X^n]$

- ▶ **funzione caratteristica**

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}]$$

$\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$;

se $\varphi_X = \varphi_Y$ allora $X \sim Y$;

se $X \in L^n$ allora $\varphi_X^{(n)}(0) = i^n E[X^n]$

Speranza Matematica

- Alcune disuguaglianze

- ▶ [Disuguaglianza di Jensen]

I intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, \mathcal{B}_I misurabile
 X va, $X \in I$ q.c. con $f(X) \in L^1$
allora $X \in L^1$ e riesce

$$f(E[X]) \leq E[f(X)]$$

- Esempio.

- ▶ $E[|X|] \leq |E[X]|$ se $X \in L^1$

- ▶ $E[X]^2 \leq E[X^2]$ se $X \in L^2$

Speranza Matematica

- **Varianza**: se $X \in L^2$ si definisce

$$\sigma_X^2 = \text{VAR}[X] = E[(X - E[X])^2] \geq 0$$

$$\sigma_X = \sqrt{\text{VAR}[X]} = \text{deviazione standard di } X$$

- Proprietà: se $X \in L^2$
 - ▶ $\text{VAR}[X] = E[X^2] - E[X]^2$
 - ▶ $\text{VAR}[\alpha X + \beta] = \alpha^2 \text{VAR}[X]$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 - ▶ $\text{VAR}[X] = 0$ se e solo se $X = E[X]$ q.c.

Speranza Matematica

- Esercizio.

- ▶ se $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, $\text{VAR}[X] = p(1-p)$

- ▶ se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, calcolare

$$E[X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)]$$

e ricavare $\text{VAR}[X]$

- ▶ $X \sim U(a, b)$

$$\text{VAR}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- ▶ $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$

$$\text{VAR}[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

- ▶ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\text{VAR}[X] = \sigma^2$$

Speranza Matematica

- Alcune disuguaglianze

- ▶ [Disuguaglianza di Markov] $X \geq 0$ q.c., per ogni $\alpha > 0$

$$P(X > \alpha) \leq \frac{E[X]}{\alpha}$$

- ▶ [Disuguaglianza di Bienaymé-Chebyshev] $X \in L^2$, per ogni $\varepsilon > 0$

$$P(|X - E[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$$

quindi per ogni $k \geq 1$ (“evento k -sigma”)

$$P(|X - E[X]| > k\sigma_X) \leq \frac{1}{k^2}$$

Speranza Matematica

- Convergenza della speranza matematica

- ▶ se $X_n \rightarrow X$ q.c. (**convergenza quasi certa**), cioè per ogni $\omega \in A$ con $P(A) = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) \rightarrow X(\omega),$$

quando succede che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[X_n] = E[X] \quad ?$$

- ▶ [**Teorema di convergenza monotona**]
 $(X_n)_{n \geq 1}$ va con $0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$, q.c.
allora posto

$$X = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n \equiv \sup_n X_n \text{ q.c.}$$

riesce

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[X_n] = E[X] \in [0, +\infty]$$

Speranza Matematica

- Convergenza della speranza matematica
 - ▶ [Teorema di convergenza dominata (di Lebesgue)]
(X_n) $_{n \geq 1}$ e X va tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X \text{ q.c.}$$

ed esiste $Y \in L^1$ tale che

$$|X_n| \leq Y \text{ per ogni } n \geq 1, \text{ q.c.}$$

allora $X_n, X \in L^1$ per ogni $n \geq 1$ e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[X_n] = E[X]$$

Speranza Matematica

- Convergenza di serie di speranze matematiche

▶ [Serie a termini positivi]

$(X_n)_{n \geq 1}$ va con $X_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$ q.c., allora

$$E \left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} E[X_n]$$

Speranza Matematica

- Convergenza di serie di speranze matematiche

▶ [Serie convergente assolutamente] $(X_n)_{n \geq 1}$ va con

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E[|X_n|] < +\infty$$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} |X_n| \in L^1$ e

$$E \left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} E[X_n]$$

- Quindi, se $\sum_{n=1}^{+\infty} E[|X_n|] < +\infty$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ converge assolutamente, q.c.

Speranza Matematica

- Esercizio. Nei seguenti due casi dire se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$$

converge q.c. e calcolare il suo valore atteso

▶ $X_n \sim \text{Gamma}(1, 2^{n-1}), n \geq 1$

▶ per $n \geq 1$

$$X_n \sim \begin{cases} -\frac{1}{n!} & \text{con prob. } 1-p \\ +\frac{1}{n!} & \text{con prob. } p \end{cases}$$