Incollamenti topologici

<u>*Incollamento di due spazi*</u>. $A \subset X$, $f : A \to Y \rightsquigarrow$

$$X \cup_f Y \overset{\text{def}}{=} (X \sqcup Y)/(a \sim f(a),\, \forall\, a \in A) \quad \textit{(incollamento di } X \textit{ e } Y\textit{)}$$

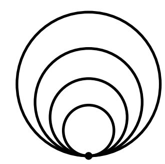
Se f omeo evidente dal contesto scriviamo anche $X \cup_A Y$.

Esempio. $S^n \cong B^n \cup_{S^{n-1}} B^n$ incollamento di due copie di B^n lungo il bordo mediante l'identità.

<u>*Caso notevole: unione puntata*</u>. Dati $a \in X$, $b \in Y \rightsquigarrow$

$$X \vee Y \overset{\text{def}}{=} (X \sqcup Y)/(a \sim b) \quad X \text{ e } Y \text{ incollati in un punto.}$$

Esempio. $\vee_n S^1$ unione puntata di n copie di S^1
(bouquet di circonferenze).



<u>*Autoincollamento*</u>. $A \subset X$, $f : A \to X \rightsquigarrow$

$$X/\!\sim_f \, = X/(a \sim f(a),\, \forall\, a \in A) \quad \textit{(autoincollamento)}$$

Spazi proiettivi

Caso reale. $\pi : S^n \to \mathbf{RP}^n \rightsquigarrow \pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow x = \pm y \Rightarrow$

$$\mathbf{RP}^n = S^n/(x \sim -x,\, \forall\, x \in S^n).$$

$\mathbf{RP}^n$ si ottiene da S^n identificando le coppie di *punti antipodali* $\pm x \in S^n$.

Carte affini. $H_0 \subset \mathbf{RP}^n$ iperpiano proiettivo di equazione

$$H_0 :\ x_0 = 0, \qquad H_0 \cong \mathbf{RP}^{n-1}$$

$\pi^{-1}(\mathbf{RP}^n - H_0) \subset \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ aperto $(x_0 \neq 0) \Rightarrow \mathbf{RP}^n - H_0 \subset \mathbf{RP}^n$ aperto.

$$\psi_0 : \mathbf{RP}^n - H_0 \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^n \qquad \text{omeo } \textit{(carta affine)}$$

$$\psi_0([x_0, \ldots, x_n]) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

$$\psi_0^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = [1, x_1, \ldots, x_n]$$

Retta proiettiva reale. $H_0 = \{[0,1]\} \subset \mathbf{RP}^1$ e $\mathbf{RP}^1 - H_0 \cong \mathbf{R} \Rightarrow$

$$\mathbf{RP}^1 \cong \widehat{\mathbf{R}} \cong S^1.$$

Caso complesso. $H_0 \subset \mathbf{CP}^n$ iperpiano proiettivo di equazione

$$H_0 : \ x_0 = 0, \qquad H_0 \cong \mathbf{CP}^{n-1}$$

$\pi^{-1}(\mathbf{CP}^n - H_0) \subset \mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ aperto $(x_0 \neq 0) \Rightarrow \mathbf{CP}^n - H_0 \subset \mathbf{CP}^n$ aperto.

$$\psi_0 : \mathbf{CP}^n - H_0 \xrightarrow{\cong} \mathbf{C}^n \qquad \text{omeo } \textit{(carta affine)}$$

$$\psi_0([x_0, \ldots, x_n]) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

$$\psi_0^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = [1, x_1, \ldots, x_n]$$

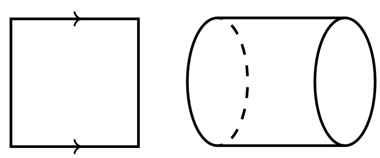
Retta proiettiva complessa. $H_0 = \{[0, 1]\} \subset \mathbf{CP}^1$ e $\mathbf{CP}^1 - H_0 \cong \mathbf{C} \Rightarrow$

$$\mathbf{CP}^1 \cong \widehat{\mathbf{C}} \cong \widehat{\mathbf{R}}^2 \cong S^2.$$

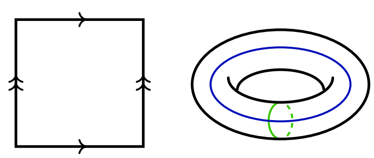
N. B. $\mathbf{RP}^n$ e $\mathbf{CP}^n$ non sono omeomorfi a sfere per $n > 1$.

Quozienti del quadrato

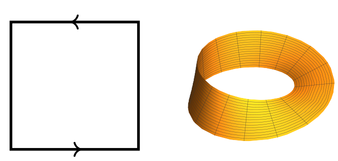
Incolliamo i lati linearmente a due a due.



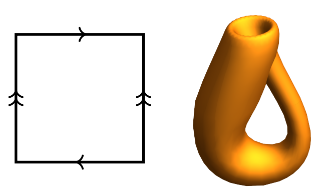
$[0, 1] \times S^1$
Anello



$T^2 = S^1 \times S^1$
Toro



Mb
Striscia di Möbius



Kl
Bottiglia di Klein