Lezione 13 novembre 2023

lunedì 13 novembre 2023 08:59

Avviso: giovedì 16/11 no lezione

Secondo foglio di esercizi su Moodle

SISTEMI LINEARI DI CURVE PIANE O IPERSUPERFICI

Per comodità cons. spazi proiettivi: $\mathbb{P}^n_K$
(le def. che vedremo sono analoghe in $\mathbb{A}^n_K$)

Def.: Una IPERSUPERFICIE ALG. PROIETTIVA

è $X = (Z_p(F), F)$, con

$F \in K[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo di grado

$d \geq 1$.

$Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^n_K$

L'insieme naturale per classificare tali X è

l'insieme dei polinomi omogenei di grado $d \geq 1$,

a meno di un fattore (non nullo) di proporzionalità;

più precisamente:

$K[x_0, x_1, \dots, x_n]_d$ = polin. omog. di grado d $\cup \{0\}$

risulta un SSV di $K[x_0, \dots, x_n]$

$$\dim_K K[x_0, \dots, x_n]_d = \binom{n+1+d-1}{d} = \binom{n+d}{d}$$

$= \#$ combinazioni di $n+1$ oggetti, presi a d a d, con ripetizione

base $= \{$monomi in $x_0, \dots, x_n$ di grado $d\}$
$= \{x_0^d, x_0^{d-1}x_1, x_0^{d-1}x_2, \dots, x_n^d\}$

$$= \left\{ x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \;\middle|\; \begin{array}{l} i_0 + i_1 + \dots + i_n = d \\ i_j \geq 0 \end{array} \right\}$$

Allora IDENTIFICHIAMO L'INSIEME DELLE IPERSUPERFICI PROIETTIVE di grado $d \geq 1$ con lo spazio proiettivo

$$\mathbb{P}(K[x_0, \dots, x_n]_d)$$

Esempio: $n=2$, $d=2$:

$$\dim K[x_0, x_1, x_2]_2 = \binom{2+2}{2} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2!\ 2!} = 6$$

base: $x_0^2,\ x_0x_1,\ x_0x_2,\ x_1^2,\ x_1x_2,\ x_2^2$

$n=2$, $d=1$: $\dim K[x_0, x_1, x_2]_1 = \binom{2+1}{1} = 3$

base $\{x_0, x_1, x_2\}$

duale

$$\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_1 \cong (\mathbb{K}^3)^{\vee} = \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^3, \mathbb{K})$$

$$\dim \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_3 = \binom{2+3}{3} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4\cdot 5}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1\cdot 2} = 10$$

Infine: classi di proporzionalità di F omogenei sono elementi dello spazio proiettivo associato:

$$\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]_d) =: \mathbb{P}^{N(d,n)}$$

$$N(d,n) := \binom{n+d}{d} - 1$$

Caso $n=2$: $\binom{2+d}{d} - 1 = \frac{(d+2)!}{d!\ 2!} - 1 = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1$

$$= \frac{d(d+3)}{2} = N(d,2)$$

Def.: Un SISTEMA LINEARE DI DIMENSIONE g DI IPERSUPERFICI PROIETTIVE

è il sottospazio proiettivo Λ associato a un SSV di $K[x_0, \dots, x_n]_d$ di dim $g+1$:

$$U \subseteq K[x_0, \dots, x_n]_d, \quad \Lambda = \mathbb{P}(U).$$

$\dim U = \rho + 1, \qquad \dim \Lambda = \rho.$

Def.: Se $\rho = 1$, Λ si dice FASCIO

$\rho = 2$, Λ si dice RETE

$\rho = 3$, Λ si dice WEB (TESSUTO)

Pb: Come assegnare Λ, ovvero U?

Con generatori opp. eq. cartesiane.

Con generatori: $U = \mathrm{Span}(F_0, F_1, \dots, F_\rho)$

con $F_i \in \mathbb{K}[x_0, .., x_n]_d$, linearm. INDIP.

$\Lambda = \mathbb{P}(U)$

$$[F] \in \Lambda \Longleftrightarrow F \in U \Longleftrightarrow F = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_\rho F_\rho$$

Con eq. cartesiane: U ha dim $\rho + 1$ in $\mathbb{K}[x_0, .., x_n]_d$

$\Rightarrow$ è il SSV delle soluzioni di un SLO

$$A \cdot X = 0$$

in $\binom{n+d}{d}$ indeterminate e $\binom{n+d}{d} - (\rho + 1)$ equazioni linearmente indipendenti.

Def.: Ogni eq. lineare nei coefficienti del generico polinomio di $\mathbb{K}[x_0, .., x_n]_d$ si chiama

CONDIZIONE LINEARE.

OSS.: Se $A \cdot X = 0$ è SLO che determina U, delle eq. per Λ sono date da

$$A \cdot X = 0$$

sono $\binom{n+d}{d} - (\varrho + 1) = \binom{n+d}{d} - 1 - \varrho = N(d,n) - \varrho$.

Esempio: Passaggio per un punto:

$$A = (a_0 : a_1 : \dots : a_n)$$

Cons. $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ t.c. $F(A) = 0$

$$F = \sum_{\substack{i_0 + \dots + i_n = d \\ i_j \geq 0}} c_{i_0 i_1 \dots i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

$$F(A) = 0 = \sum c_{i_0 i_1 \dots i_n} a_0^{i_0} a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}$$

è una eq. lineare nei coeff. $c_{i_0 \dots i_n}$

Esempio: $n=2$: condizione che $B = (b_0 : b_1 : b_2)$ sia singolare per $F(x_0, x_1, x_2)$:

$$B \text{ è singolare} \iff \nabla F(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \sum c_{i_0 i_1 i_2} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$$

$\nabla F(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono 3 condizioni lineari nelle $c_{i_0 i_1 i_2}$

Esempio: Tangenza in $P = (p_0 : p_1 : p_2)$ con retta tg. assegnata : $L : a x_0 + b x_1 + c x_2 = 0$

$$L \ni P$$

$F(P)=0$ 1 condizione lineare

retta tg. in P : ${}^t\nabla F(P)\cdot\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$

deve essere la retta L

$$\boxed{rg\begin{pmatrix}\partial_{x_0}F(P) & \partial_{x_1}F(P) & \partial_{x_2}F(P)\\ a & b & c\end{pmatrix}=1}$$

$\Leftrightarrow$ i 3 minori sono nulli; altre 3 condizioni lineari? NO

Infatti: $L=\overline{PQ}$, $L\ni P$, sia $Q\in L$

voglio che ${}^t\nabla F(P)\cdot\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}$ passi per P e Q:

${}^t\nabla F(P)\cdot\begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\end{pmatrix}=0$: già garantita da

$F(P)=0$; infatti, per l'identità di Eulero si ha:

$$d\cdot F = x_0\partial_0F+x_1\partial_1F+x_2\partial_2F$$

$$0=d\cdot F(P)=p_0\partial_0F(P)+p_1\partial_1F(P)+p_2\partial_2F(P)$$

$$={}^t\nabla F(P)\cdot\begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\end{pmatrix}$$

Rimane da imporre ${}^t\nabla F(P)\cdot\begin{pmatrix}q_0\\q_1\\q_2\end{pmatrix}=0$: eq. lineare in $c_{i_0i_1i_2}$

$Q=(q_0:q_1:q_2)$

$\rightarrow$ cond. di tg. in un punto con tg assegnata

$=2$ cond. lineari

OSS.: Non tutte le cond. lineari sono di questo tipo (pass. per un punto, sing., tg)

Esercizio: trovare una cond. lineare in $K[x_0, x_1, x_2]_2$ che non corrisponde alla cond. di passaggio per alcun punto.

Pb.: Supp. di imporre passaggio per r punti $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}^2$. Trovo r condizioni lineari;

come capire se sono LIN. IND. opp. DIP.?

Sono dip. ⟺ una eq. può essere scritta come comb. lineare delle altre

⟺ tale eq. rappresenta il pass. per un punto che è automatic. soddisfatta dalle imposiz. di pass. per altri r-1 punti

⟺ ci sono r-1 punti t.c. se una curva passa per essi, passa automatic. per l'r-esimo

CONSEGUENTEMENTE:

pass. per r punti impone r condiz. LIN. INDIP. ⟺ $\forall P_i \in \{P_1, \dots, P_r\}$, $\exists$ una curva, ovv. un F t.c.

$F(P_j) = 0 \ \forall j \neq i$

$F(P_i) \neq 0$.

Analog: se ho r condiz. lineari (non nec. pass. per r punti), esse sono lin. indip. ⟺ $\forall$ eq., $\exists$ F che verifica tutte le eq. rimanenti ma non quella data.

Esercizio:

In $K[x_0, x_1, x_2]_3$, dimostrare che

$\nabla F(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eq. a 3 condiz.

lin. indipendenti:

Eventualmente: $\nabla F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 3 condiz. indip.

$\forall\, Q \in \mathbb{P}^2$.

Def.: Un punto $Q \in \mathbb{P}^2_K$ si dice **PUNTO BASE** per Λ se $Q \in Z_p(F)$ $\forall [F] \in \Lambda$.

$$Bs\,\Lambda := \{\text{punti base}\}$$

OSS: Se $\Lambda = \mathbb{P}(\mathrm{Span}(F_0, \dots, F_s))$

e $Q \in Z_p(F_0) \cap \dots \cap Z_p(F_s)$

$\Longleftrightarrow$ $Q \in Bs\,\Lambda$

Pb.: È vero che se F è t.c.

$Z_p(F) \supseteq Bs(\Lambda) \longrightarrow [F] \in \Lambda$?

DIPENDE DALLA GEOMETRIA DI $Bs(\Lambda)$!

Esempio: FASCI DI CONICHE PIANE

$$\Lambda = \mathbb{P}(U), \quad U = \mathrm{Span}(F_0, F_1)$$

$$F_0, F_1 \in K[x_0, x_1, x_2]_2$$

e supp. $Z_p(F_0)$ e $Z_p(F_1)$ senza comp.

irr. comuni

Teo. di Bèzout:

$$\sum_{Q \in Z_p(F_0) \cap Z_p(F_1)} I_Q(F_0, F_1) = 4$$

Supp. 4 punti distinti: A, B, C, D

$Bs(\Lambda) = \{A, B, C, D\}$

Cons. F t.c. $F(A) = F(B) = F(C) = F(D) = 0 \quad \circledast$

4 condiz. lineari

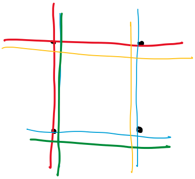
Il sottospazio proiettivo $M = \{F : F \text{ soddisfa } \circledast\}$

ha codim. ≥ 4

$M = \mathbb{P}(W)$, $\dim W \geq 6 - 4 = 2$

$M \supseteq \Lambda$; $M \supsetneq \Lambda \iff$ 4 cond. non sono indip.

Così:

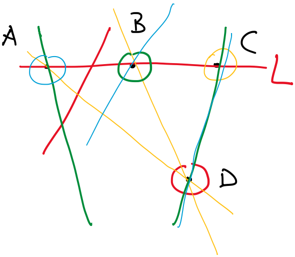


a 3 a 3 non allineati

$\Downarrow$

$M = \Lambda$

altre poss.



sono 4 cond. INDIP.

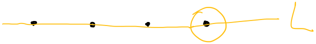
ma: $Bs(\Lambda) \neq \{A, B, C, D\}$

perché: ogni conica che contiene A, B, C

per Teo. di Bézout, contiene la retta L

$\Longrightarrow \mathrm{Bs}(\Lambda) = \{L, D\}$

Ultimo caso:

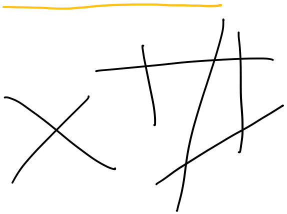


4 cond. DIP.

3 INDIP.

$F(A) = F(B) = F(C) = 0 \Longrightarrow F(D) = 0$

$\dim W = 6-3 = 3 \Longrightarrow \dim M = 2$ è rete di coniche



$M \supsetneq \Lambda$

$\mathrm{Bs}\,\Lambda \geq L$

OSS: . . . . non imp. cond. indip. alle coniche

e invece alle cubiche? sì.