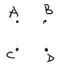
Lezione 14 novembre 2023

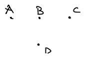
martedì 14 novembre 2023 09:11

Visto: sistemi lineari, cond. di pass. per un punto

Esempio 4 punti: 4 cond. indip.



: $Bs\Lambda = \{A, B, C, D\}$



: $Bs\Lambda = \{\overline{AB}, D\}$

Esempio: 9 punti: cubiche piane per 9 punti

$$\dim \mathbb{P}(K[x_0, x_1, x_2]_3) = \binom{2+3}{3} - 1 = \frac{5!}{2!\,3!} - 1 = 9$$

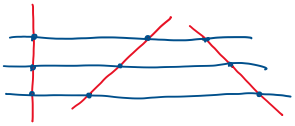
Se 9 punti $P_1, \dots, P_9$ impongono cond. LIN. INDIP.

$\Rightarrow \dim \Lambda = 9 - 9 = 0$, cioè Λ è 1 punto

$\Lambda = \{ [F] : F(P_i) = 0 \}$

$\Rightarrow$ c'è 1! cubica che passa per 9 punti.

Se invece scelgo 9 punti che siano i punti di intersezione di 2 cubiche senza componenti comuni, ad es.:



Questi $\subseteq Z_P(F_1) \cap Z_P(F_2)$

F_1, F_2 polinomi cubici

$\rightarrow \{P_1, \dots, P_9\} = \Lambda = \mathbb{P}(\mathrm{Span}(F_1, F_2))$

$\Rightarrow$ i 9 punti impongono $N(2,3) - \dim \Lambda$ condiz. indipendenti, cioè $9 - 1 = 8$

Def.: Se r punti di $\mathbb{P}^2_K$ impongono r condiz. lin. INDIP. alle curve di grado d, allora si dicono IN POSIZ. GENERALE RISP. CURVE DI GRADO d.

OSS.: Se $d = 1$, r punti in POS. GEN. rispetto alle curve di grado 1 $\Longleftrightarrow$ non sono allineati

Teorema di GUIDO CASTELNUOVO

(Venezia 1865 - Roma 1952)

Siano $P_1, .., P_r$ punti distinti di $\mathbb{P}^2_K$. Se $d \geq r-1$, allora i P_i sono in posiz. gen. risp. curve di grado d.

Dim. Fisso d, e dimostro per induzione su r, $r \leq d+1$

$r = 1$: ok

Supp. vero per $r-1$, mostro per r

$P_1, .., P_r$; per ipotesi induttiva $P_1, .., P_{r-1}$ impongono cond. ind. a curve di grado d

$\Lambda_{r-1} = \{[F]$ di grado d, $P_1, .., P_{r-1} \in Z_p(F)\}$

ha dim $= N(2,d) - (r-1)$

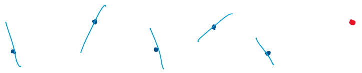
$\Lambda_{r-1} \supseteq \Lambda_r = \{[F] : P_1, .., P_r \in Z_p(F)\}$

$P_1, .., P_r$ imp. cond. indip $\iff \Lambda_{r-1} \supsetneq \Lambda_r$

Costruisco $[F] \in \Lambda_{r-1} \setminus \Lambda_r$ ⊛

$\forall\ i = 1, .., r-1$ cons. una retta $L_i \ni P_i$

e non contiene $L_i \not\ni P_j \quad i \neq j$



$L_i = Z_p(H_i)$

pongo $F := H_1 \cdot H_2 \cdots H_{r-1} \cdot G_0$

Con G_0 di grado $d-(r-1) \geq 0$

$G_0 \not\ni P_k$, $\forall\ k = 1, .., r$

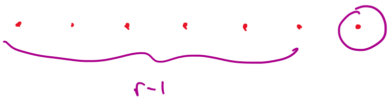
F verifica ⊛

Esempi : $r = 4$, 4 punti distinti impongono cond. indip. alle curve di grado $d \geq r-1 = 3$

Domanda: $d \geq r-1$ è ottimale?

Cioè: esistono insiemi di r punti t.c. imp. cond. DIP. alle curve di grado $r-2$? Sì

Infatti: se $P_1, \dots, P_r$ sono r punti allineati, essi impong. cond dip alle curve di grado $r-2$



Esercizio: se r punti NON sono allineati, allora impongo cond. INDIP. alle di grado $r-2$.

Prop.: Date $Z_p(F), Z_p(G) \subseteq \mathbb{P}^2$

$\deg F = \deg G = d$

con $Z_p(F) \cap Z_p(G) = d^2$ punti distinti.

Se $\exists\ n < d$ t.c. $n \cdot d$ di questi punti giacciono su curva irrid. di grado n

$\Rightarrow$ i rimanenti $d^2 - nd$ punti giacciono su curve di grado $d-n$.

Dim. Cons. $\Lambda = \mathbb{P}(\mathrm{Span}(F, G))$ fascio generato da F e G

$n \cdot d$ punti giacciono su $Z_p(H)$, H irriduc. di grado n

Fisso $Z_p(H)$ fisso P, diverso dai $n \cdot d$ punti di prima.

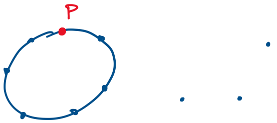
Cons. $[R] \in \Lambda$, $Z_p(R) \ni P$

$\dim \Lambda = 1$, pass. per P è cond. lineare

$\Rightarrow \exists$ almeno un R , ed è unica

(se $\exists$ sse un'altra curva T di Λ passante per d^2+1 punti, allora potrei prendere R e T come generatori di Λ : $\Lambda = \mathbb{P}(\mathrm{Span}(R,T))$ e quindi tutte le curve di Λ passerebbero per d^2+1 punti, ma per ipotesi $Bs(\Lambda) = d^2$ punti)

Es.:



$d = 3$
$d^2 = 9$
$n = 2$
$n \cdot d = 6$

Per costruzione, abbiamo

$$Z_p(R) \cap Z_p(H) \geq nd \text{ punti } \cup \{P\} = nd+1 \text{ punti}$$

$\deg R = d$, $[R] \in \Lambda$

$\deg H = n$

$\xrightarrow[\text{Teo Bezout}]{}$ H e R hanno fattore irr. in comune

Ma H irriducibile $\Rightarrow H \mid R$ (H divide R)

$R = H \cdot H_1$, H_1 di grado $d-n$

$Z_p(R)$ contiene d^2 punti

$$\| \qquad \underset{n\cdot d}{Z_p(H)} \cup \underset{d^2-nd}{Z_p(H_1)}$$

$\Rightarrow Z_p(H_1)$ contiene i rimanenti d^2-nd punti.

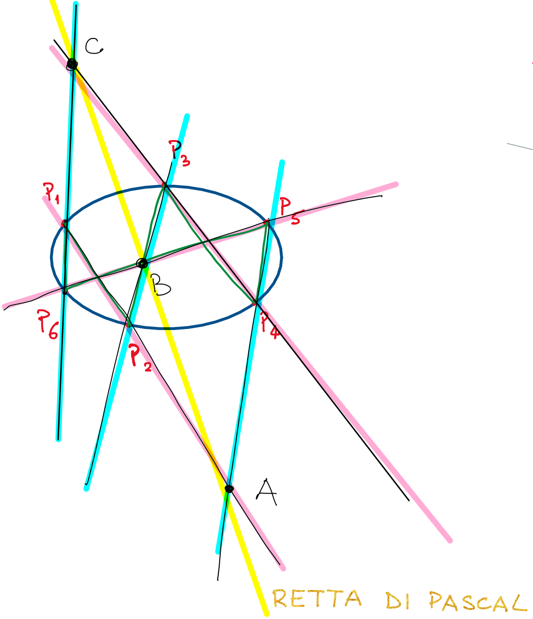
COROLLARIO : Teorema di Pascal

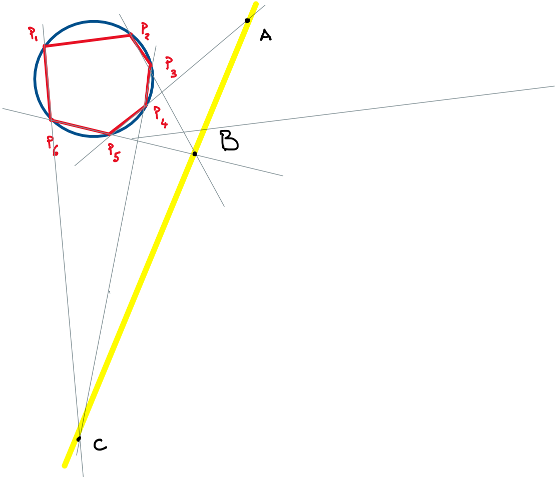
Sia F polin. omog. di grado 2 irriducibile

Z_p ; fissiamo 6 punti distinti ordinati

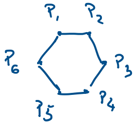
Costruisco l'esagono di vertici ordinati

$P_1, \dots, P_6$





Allora: i 3 punti di int. delle rette corrispondenti a lati opposti



$$\overline{P_1P_2} \cap \overline{P_4P_5} = A$$
$$\overline{P_2P_3} \cap \overline{P_5P_6} = B$$
$$\overline{P_3P_4} \cap \overline{P_1P_6} = C$$

SONO ALLINEATI

Dim: Cons. le seguenti cubiche riducibili: $\overline{P_1P_6} \cup \overline{P_2P_3} \cup \overline{P_4P_5} =: C_1$

e $\overline{P_1P_2} \cup \overline{P_3P_4} \cup \overline{P_5P_6} =: C_2$

i $\underset{=3^2}{9}$ punti $\{P_1, P_2, \dots, P_6, A, B, C\} = C_1 \cap C_2$

$6 = 2 \cdot 3$ sono su conica irriducibile: $n = 2$

$\Rightarrow$ per Prop $d^2 - nd = 3$ punti sono su

una $d - n = 3 - 2 = 1$

Esercizio: Descrivere i 3 punti allineati nel caso esagono regolare

OSS: Dati 6 punti su conica irriducibile, quanti esagoni? $6!$ = permut. di $P_1, \dots, P_6$

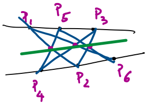
12 permut. danno stesso esagono

Quindi: $\frac{6!}{12}$ esagoni diversi

$\frac{\cancel{2}\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \cancel{6}}{\cancel{12}} = 60$: rette di Pascal

ESAGRAMMA MISTICO DI PASCAL

Teo. di PAPPO: caso degenere del Teorema di PASCAL: fare per esercizio.



* * *

Pb: Fissato d, qual'è il # max di punti per cui (indip. dalla loro posizione) $\exists$ sempre 1 curva di grado d che li contiene?

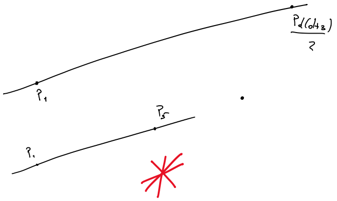
$$\dim(\mathbb{P}(K[x_0, x_1, x_2]_d)) = N(2, d) = \frac{d(d+3)}{2}$$

$$\# \max \geq \frac{d(d+3)}{2}$$

Afferma: $\frac{d(d+3)}{2} = \max$

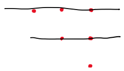
Prop: $\exists\ \frac{d(d+3)}{2} + 1$ punti che $\notin$ nessuna curva di grado d.

OSS.: $\frac{d(d+3)}{2}$ punti allineati non vanno bene.



$d = 2$: $\frac{d(d+3)}{2} + 1 = 6$

Se 6 punti sono scelti così:



non può esistere alcuna conica che ci passa