Lezione 9 novembre 2023

giovedì 9 novembre 2023 16:12

USO PARTICOLARE DEL RISULTANTE:

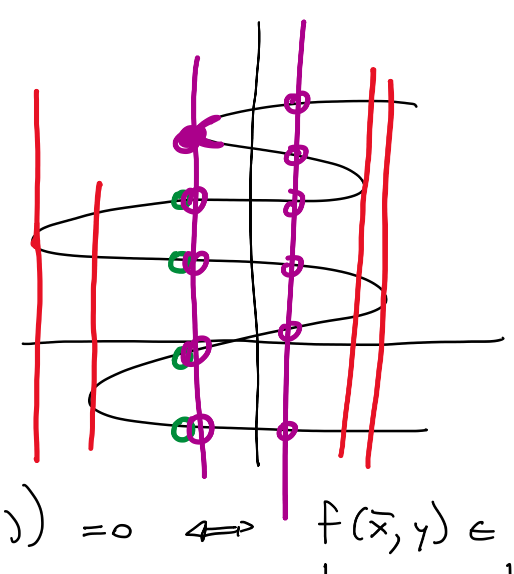
$f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$

cons. $Z(f) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

Supp. f in pos. amm. risp. al $E_2 = (0:0:1)$

(ovvero hf è —"—)

$\frac{\partial f}{\partial y} = g(x,y)$



$R_y(f, g)$

$\forall\, \bar{x}$

$R_y(f(\bar{x},y), g(\bar{x},y)) = 0 \iff f(\bar{x},y) \in \mathbb{C}[y]$ ha una radice multipla

$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},y) = (f(\bar{x},y))'$

$\iff$ la retta $x = \bar{x}$ è tg alla $Z(f)$ in almeno 1 punto

$\Rightarrow R_y\left(f(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}\right) \in \mathbb{C}[x]$

i suoi zeri sono le proiezioni dei punti di tg dove la retta tg è verticale

Interpr. geo-top. :

Cons $p_1 : \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow \underbrace{Z(y)}_{\text{asse } x} = L$

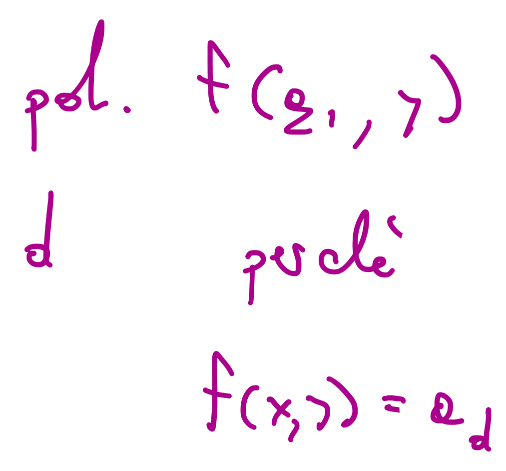
$\tilde{p}_1 = p_1|_{Z(f(x,y))} : Z(f) \longrightarrow L$

è suriettiva: infatti $\forall\, Q \in L$, $Q = (q_1, 0)$

$(\tilde{p}_1)^{-1}(Q) = \{(q_1, \bar{y}) : f(q_1, \bar{y}) = 0\}$

le $\bar{y}$ sono le soluzioni $f(q_1, y) = 0$

Siamo su $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\neq \emptyset$



FIBRA DI $\tilde{p}_1$ SOPRA Q

$\neq \emptyset$, = radici del pol. $f(q_1, y)$

$\deg f(q_1, y) = d$ perché $f(x,y) = a_d y^d + \dots$, $a_d \neq 0$

$\#(\tilde{p}_1)^{-1}(Q) = d$ a patto di contare ogni radice con molt. alg.

$\Rightarrow \tilde{p}_1$ è RIVESTIMENTO FINITO ALGEBRICO di grado d

CON PUNTI DI RAMIFICAZIONE, cioè punti per cui la fibra $\neq d$ punti distinti

Posso generalizzare a $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$

Cons $f(x,y,z) \in \mathbb{C}[x,y,z]$

di grado d, supp. che $f(x,y,z) = a \cdot z^d + \dots$, $a \neq 0$

$R_z\left(f, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = R(x,y)$

$Z(f) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ è una SUPERF. ALG.

Piano tg : simile al caso delle curve

Eq. aff. : ${}^t\nabla(f)(P) \cdot \begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \\ z - p_3 \end{pmatrix} = 0$

in $P = (p_1, p_2, p_3)$

$Z(R(x,y)) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ piano xy di eq. $z = 0$ $= Z(z)$

$\downarrow$

proiezioni ort. dei punti dove piano tg. è verticale

= proiez. dei punti di ramificazione per

$\tilde{p} = p|_{Z(f)} : Z(f) \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

$\tilde{p}(p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2)$

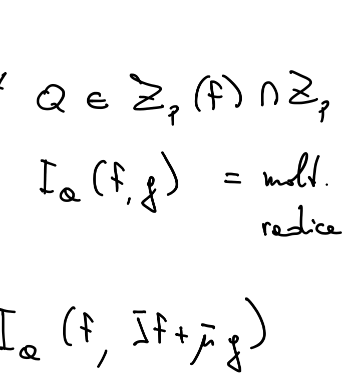
Richiamo: fasci di coniche proiettive:

5 tip. di fasci di coniche irriducibili:

$\#(C_1 \cap C_2) = 4$

$\sum I_Q(C_1, C_2) = 1+1+1+1$

Esercizio : Cons. $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(1:1:1)$, $(1:1:2)$



$R(f, g)$ $\deg f = \deg g = 2$

$\forall\, Q \in Z_p(f) \cap Z_p(g)$

$I_Q(f,g)$ = molt. della rispettiva radice in $R_{x_2}(f, g)$

$I_Q(f, \lambda f + \mu g)$