Lezione 9 novembre 2023

giovedì 9 novembre 2023 11:14

Visto: dimensione

Prop. Sia V sv su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$-sv) finitamente generato, e sia $W \subseteq V$ sia ssv.
Allora:

① $\dim W \leq \dim V$

② $\dim W = \dim V \iff W = V$

Dim. ① V fin. gen. per ipotesi
$\Rightarrow$ per oss 2 di ieri, anche W è finit. generato; quindi $\exists$ base di W:

$\{w_1, \dots, w_m\}$ base di W

in part. sono LIN. INDIP. in W

$\xRightarrow[\text{oss 1}]{}$ $w_1, \dots, w_m$ sono LIN. INDIP. in V

$\xRightarrow[\text{Teo. di Completamento}]{}$ $\exists$ $\mathcal{B}$ di V tale che

$\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq \mathcal{B}$

$\dim W = \#\{w_1, \dots, w_m\} = m \leq \#\mathcal{B} = \dim V$

② Se $W = V$ $\Rightarrow$ è chiaro $\dim W = \dim V$

Supp. $\dim W = \dim V = n$

in W fisso una base: $\{w_1, \dots, w_n\}$

in part. sono LIN. INDIP. in W $\xRightarrow[\text{oss 1}]{}$ LIN. IND. in V

sono n vettori, e $n = \dim V$

$\xRightarrow[\text{Prop. di ieri}]{}$ $\{w_1, \dots, w_n\}$ è anche base di V

$W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_n) = V$

CONSEGUENZE:

- Oss. 2 di ieri: V finitamente generato
  $\Rightarrow$ $W \subseteq V$ ssv è finit. gen.
  In altre parole: tutti e soli i ssv sono del tipo $W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$
- Classifichiamo i ssv di $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$:

① $V = \mathbb{R}$, $\dim \mathbb{R} = 1$ come SV su $\mathbb{R}$

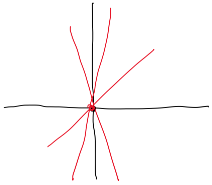
chi sono ssv?

$$0 \leq \dim W \leq 1, \quad \dim W \begin{cases} = 0 & W = \{0\} \\ = 1 = \dim V & \Rightarrow W = \mathbb{R} \end{cases}$$

② $V = \mathbb{R}^2$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $W \subseteq \mathbb{R}^2$ ssv

$0 \leq \dim W \leq 2$

$\dim W =$
- $0 \Rightarrow W = \{0\}$
- $1 \Rightarrow W = \mathrm{Span}(w_1)$ $w_1 \neq 0$
  RETTE VETTORIALI (passano per $(0,0)$)
- $2 \Rightarrow W = \mathbb{R}^2$



③ $V = \mathbb{R}^3$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $W \subseteq \mathbb{R}^3$

$\dim W =$
- 0 $W = \{0\}$
- $1 \Rightarrow W = \mathrm{Span}(w_1)$
- $2 \Rightarrow W = \mathrm{Span}(w_1, w_2)$ PIANO VETTORIALI
  con w_1, w_2 LIN. INDIP (non proporzionali)
- 3 $W = \mathbb{R}^3$

④ $V = \mathbb{R}^n$, $n \geq 4$

$\dim W =$
- 0
- 1 RETTA VETT.
- 2 PIANO VETT.
- $\vdots$
- $n-1$ IPERPIANI VETTORIALI
- n

Def.: V finitamente gen., $\dim V = n$

$W \subseteq V$ ssv

$\dim V - \dim W =: \mathrm{codim}\, W$

CODIMENSIONE DI W in V

DIMENSIONE DI INTERS. DI SSV

Teorema: FORMULA DI GRASSMANN

Siano $W_1, W_2 \subseteq V$, $\dim V = n$

Allora:

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2)$$

dove: $W_1 + W_2 := \{v \in V : \exists w_1 \in W_1, \exists w_2 \in W_2 \text{ t.c. } v = w_1 + w_2\}$

è il SSV somma

Dim.: Abbiamo $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$ è ssv di W_1

$W_1 \cap W_2 \subseteq W_2$ è ssv di W_2

Fisso base $\mathcal{B}_{W_1 \cap W_2} = \{v_1, \dots, v_r\}$, $\dim W_1 \cap W_2 = r$

Con Teo. di Completamento, completo a base di W_1:

$\mathcal{B}_{W_1} = \{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_k\}$, $\dim W_1 = r + k$

$\mathcal{B}_{W_2} = \{v_1, \dots, v_r, y_1, \dots, y_h\}$, $\dim W_2 = r + h$

Affermo che: $\mathcal{B}_{W_1} \cup \mathcal{B}_{W_2} = \{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_k, y_1, \dots, y_h\}$

è BASE di $W_1 + W_2$. ($\Rightarrow \dim W_1 + W_2 = r+k+h$

Se dimostro questo, avrò:

$r = r+k+r+h-(r+k+h)$ e la formula

sarà dimostrata

$\dim W_1 \cap W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 + W_2)$

① Dimostro che $\mathcal{B}_{W_1} \cup \mathcal{B}_{W_2}$ è insieme di generatori per $W_1 + W_2$:

sia $v \in W_1 + W_2$; allora $\exists\, w_1 \in W_1$
$\exists\, w_2 \in W_2$

t.c. $v = w_1 + w_2$

$= \underbrace{c_1 v_1 + \dots + c_r v_r + d_1 u_1 + \dots + d_k u_k}_{=w_1} + \underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r + b_1 y_1 + \dots + b_h y_h}_{=w_2}$

$= (c_1 + a_1) v_1 + \dots + (c_r + a_r) v_r + d_1 u_1 + \dots + d_k u_k + b_1 y_1 + \dots + b_h y_h$

$\Rightarrow$ sono generatori per $W_1 + W_2$

Infine: $v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_k, y_1, \dots, y_h$ sono LIN. INDIP.

sia $a_1 v_1 + \dots + a_r v_r + b_1 u_1 + \dots + b_k u_k + \overset{=0}{c_1 y_1 + \dots + c_h y_h} = 0_V$

$\underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_r v_r + b_1 u_1 + \dots + b_k u_k}_{\in W_1} = \underbrace{-c_1 y_1 - \dots - c_h y_h}_{\in W_2}$

$\in W_1 \cap W_2$

$= d_1 v_1 + \dots + d_r v_r$

⇙

$d_1 v_1 + \dots + d_r v_r + c_1 y_1 + \dots + c_h y_h = 0_V$

MA: $\{v_1, .., v_r, y_1, ..., y_h\}$ è base di W_2

$\Rightarrow$ LIN. INDIP. $\Rightarrow d_1 = .. = d_r = c_1 = \cdots c_h = 0$

$a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r + b_1 u_1 + \cdots + b_k u_k = 0_V$

ORA: $\{v_1, .., v_r, u_1, .., u_k\}$ è base di W_1

$\Rightarrow$ sono LIN. INDIP. $\Rightarrow a_1 = .. = a_r = b_1 = .. = b_k = 0$

COROLLARIO: $W_1, W_2 \subseteq V$ SSV

$\Rightarrow \dim W_1 \cap W_2 \geq \dim W_1 + \dim W_2 - \dim V$

Dim.: $\dim W_1 + W_2 \leq \dim V$

$W_1 + W_2 \subseteq V$

COROLLARIO: $V = \mathbb{R}^3$

cons. W_1 e W_2 piani vettoriali

cioè $\dim W_1 = 2 = \dim W_2$

$\Rightarrow \dim (W_1 \cap W_2) \geq \dim W_1 + \dim W_2 - \dim \mathbb{R}^3$

$= 2 + 2 - 3 = 1$

SOMMA DIRETTA di 2 SSV

Def.: Siano $W_1, W_2 \subseteq V$

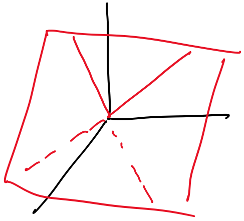
La somma $W_1 + W_2$ si dice DIRETTA

se $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$.

In questo caso: Grassmann:

$\dim W_1 \cap W_2 = 0 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 + W_2)$

$\Rightarrow \dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$



Se $U, W \subseteq V$ ssv t.c.

$U + W = V$ e $U \cap W = \{0\}$

allora U e W si dicono SUPPLEMENTARI.

Scriviamo: $U \oplus W = V$

↳ somma diretta

Es: $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ possibili dimensione

0	3
1	2
2	1
3	0

PROP.: Dato $W \subseteq V$ ssv, V finit. generato, $\exists$ sempre un ssv SUPPLEMENTARE DI W.

Cioè: $\exists\, U$ t.c. $W \oplus U = V$.

Dim.: Se $W = \{0_V\}$, $\{0_V\} \oplus V = V$

$\Rightarrow U = V$

Se $W = V$, $V \oplus \{0_V\} = V$, $U = \{0_V\}$

Se $W \neq \{0_V\}$, $W \neq V$

Fisso $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_s\}$, $s = \dim W$

la prolungo a base di V:

$\{w_1, \dots, w_s, u_1, \dots, u_k\}$ base di V

e definisco $U := \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_k)$

Affermo che $W \oplus U = V$.

Infatti: $W \cap U = \{0_V\}$ e $W + U = V$

sia $v \in W \cap U$

$$\Rightarrow v = a_1 w_1 + \dots + a_s w_s \in W$$

$$= b_1 u_1 + \dots + b_k u_k \in U$$

$$\Rightarrow a_1 w_1 + \dots + a_s w_s - b_1 u_1 - \dots - b_k u_k = 0_V$$

MA $w_1, \dots, u_k$ LIN. IND. $\Rightarrow a_1 = \dots = a_s = b_1 = \dots = b_k = 0$

$$\Rightarrow v = 0 \cdot w_1 + \dots + 0 \cdot w_s = 0_V$$

Dimostro infine che $V = W + U$

so che $W + U \subseteq V$ sempre

basta $V \subseteq W + U$

sia $v \in V$ qualunque

$$v = \overbrace{c_1 w_1 + \dots + c_s w_s}^{\in W} + \overbrace{d_1 u_1 + \dots + d_k u_k}^{\in U}$$

perché $w_1, \dots, w_s, u_1, \dots, u_k$ è base di V

$v = w + u$, $w \in W$
$u \in U$