Lezione 10 novembre 2023

venerdì 10 novembre 2023 11:15

RANGO DI MATRICI

Def.: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$; il RANGO PER COLONNE:

$$rg_C A := \dim \underbrace{\mathrm{Span}\left(\overbrace{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}}\right)}_{\subseteq \mathbb{K}^m}$$

Def.: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$; il RANGO PER RIGHE:

$$rg_R A := \dim \underbrace{\mathrm{Span}\left(A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(m)}\right)}_{\subseteq \mathbb{K}^n}$$

oss.: ① $rg_C A = \#$ max di colonne LIN. INDIP. di A

es.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\dim \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = 1 \Rightarrow rg_C A = 1$$

② $\mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq \mathbb{K}^m$

$\rightarrow \dim \mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \leq \dim \mathbb{K}^m = m$

$\Rightarrow \boxed{rg_C A \leq m}$

D'altra parte: $\mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ è generato da n vettori

$\Rightarrow \dim \mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \leq n$

$= rg_C A$

$\Rightarrow rg_C A \leq \min\{m, n\}$

Esempi: ⓪ $A = 0$ matrice nulla

$\Rightarrow rg_C 0 = 0 = rg_R 0$

Viceversa: se $\operatorname{rg}_c A = 0 \implies A = 0$ nulla

① $A = \mathbb{I}_n \in M_n(\mathbb{K})$

$$\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg}_c \mathbb{I}_n = \dim \operatorname{Span}(e_1, e_2, \dots, e_n)$$
$$\overset{!}{=} \dim \mathbb{K}^n = n$$

$\Rightarrow \operatorname{rg}_c \mathbb{I}_n$ è il massimo possibile

② $A \in M_3(\mathbb{R})$, $\operatorname{rg}_c A = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Teorema: $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, e sia $\tilde{A}$ sia ottenuta da A con $\boxed{OE}$. Allora:

① $\operatorname{rg}_c(A) = \operatorname{rg}_c(\tilde{A})$

② se $\tilde{A}$ è a scala, allora

$$\operatorname{rg}_c \tilde{A} = r = \#\text{ di righe non nulle}$$
$$= \#\text{ di pivot}$$

Inoltre: se $j_1, \dots, j_r$ sono gli indici di colonne dei pivot, le colonne $A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_r)}$ di A sono LIN. INDIP.

③ $\operatorname{rg}_c({}^tA) = \operatorname{rg}_c({}^t\tilde{A})$, $\tilde{A}$ a scala

④ $rg_c({}^t\tilde{A}) = rg_c(\tilde{A})$, $\tilde{A}$ a scala

$$\Downarrow$$

⑤ $rg_c A = rg_c({}^tA) = rg_R A$

Dim.: ① Usiamo FORMULA DI DIMENSIONE:

Cons. $A \cdot X = 0$, e sia W il ssv delle soluzioni. Allora si ha:

$$\boxed{rg_c A = n - \dim W}$$

vedremo la dim. con uso TRASF. LIN.

Con (OE) trovo $\tilde{A}$ e $\tilde{A} \cdot X = 0$

abbiamo visto che il ssv delle soluzioni non cambia: è ancora W; quindi Form. di Dim.

$$rg_c \tilde{A} = n - \dim W$$

$$\Rightarrow \quad rg_c A = rg_c \tilde{A}$$

② Supp. $\tilde{A}$ a scala, e sia $r = \#$ pivot

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{a}_{1j_1} & * & * & \cdots & * \\ \vdots & 0 & & \tilde{a}_{2j_2} & \cdots & \tilde{a}\,* \\ & \vdots & & & & \tilde{a}_{rj_r} \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & \end{pmatrix}$$

ho che $\tilde{a}_{ij} = 0 \qquad i > r$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathrm{Span}\left(\tilde{A}^{(1)}, \dots, \tilde{A}^{(n)}\right)} \subseteq \underbrace{\mathrm{Span}\left(e_1, e_2, \dots, e_r\right)}$$

e_i : i-esimo vettore della base canonica

es. $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 2 & & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

$$\Rightarrow \quad \dim \mathrm{Span}\left(\tilde A^{(1)},\dots,\tilde A^{(n)}\right) \le \underbrace{\dim \mathrm{Span}(e_1,\dots,e_r)}_{=r}$$

$$= \mathrm{rg}_c \tilde A \le r$$

per mostrare che $\mathrm{rg}_c \tilde A \ge r$, basta esibire r colonne di $\tilde A$ che siano LIN. INDIP.

Affermo: $\tilde A^{(j_1)}, \dots, \tilde A^{(j_r)}$ sono LIN. INDIP.

infatti: cons.

$$\underbrace{\lambda_1 \tilde A^{(j_1)} + \lambda_2 \tilde A^{(j_2)} + \dots + \lambda_{r-1} \tilde A^{(j_{r-1})} + \lambda_r \tilde A^{(j_r)}} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \in K^m$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\tilde a_{1j_1}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\tilde a_{1j_2}\\\tilde a_{2j_2}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix}\tilde a_{1j_r}\\\tilde a_{2j_r}\\\vdots\\\tilde a_{rj_r}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix}
\lambda_1 \tilde a_{1j_1} + \lambda_2 \tilde a_{1j_2} + \dots + \cancel{\lambda_r \tilde a_{1j_r}} \\
\lambda_2 \tilde a_{2j_2} + \dots + \cancel{\lambda_r \tilde a_{2j_r}} \\
\vdots \\
\lambda_{r-1} \overset{0 \neq}{\tilde a_{r-1\,j_{r-1}}} + \cancel{\lambda_r \tilde a_{r-1\,j_r}} \\
\lambda_r \tilde a_{rj_r} \ne 0 \text{ perché pivot} \\
0 \\
\vdots \\
0
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\lambda_r \tilde a_{rj_r} = 0$, ma $\Rightarrow \lambda_r = 0$

$\lambda_{r-1} \tilde a_{r-1\,j_{r-1}} = 0 \Rightarrow \lambda_{r-1} = 0$

Procedo così e con # finito di passi trovo

$\lambda_i = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, r$

Dimostro ora che nella matrice originale A anche le $A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_r)}$ sono LIN. INDIP.

Cons. $\beta_1 A^{(j_1)} + \dots + \beta_r A^{(j_r)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^m$

TRUCCO: definiamo $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n$

così:

$$s_i := \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j_1, \dots, j_r \\ \beta_k & \text{se } i = j_k \text{ per qualche } i = 1, \dots, r \end{cases}$$

es.: $j_1 = 2$, $j_2 = 4$, $j_3 = 5$

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ 0 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \qquad \beta_1 A^{(j_1)} + \beta_2 A^{(j_2)} + \beta_3 A^{(j_3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con queste scelte $A \cdot s = s_1 \cdot A^{(1)} + s_2 \cdot A^{(2)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)}$

$$= \beta_1 \cdot A^{(j_1)} + \dots + \beta_r \cdot A^{(j_r)} = 0$$

ovvero s è soluzione di $A \cdot X = 0$

ma $\tilde{A}$ è ottenuta con OE $\Longrightarrow$

$$\tilde{A} \cdot s = 0$$

$$= s_1 \cdot \tilde{A}^{(1)} + s_2 \cdot \tilde{A}^{(2)} + \dots + s_n \tilde{A}^{(n)}$$

$$= \beta_1 \tilde{A}^{(j_1)} + \beta_2 \cdot \tilde{A}^{(j_2)} + \dots + \beta_r \tilde{A}^{(j_r)} = 0$$

ma le $\tilde{A}^{(j_i)}$ sono LIN. INDIP. per appena visto $\Longrightarrow \beta_i = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, r$

③ $rg({}^tA) = rg({}^t\tilde{A})$

Cons. OE1, scambio di righe di A ⟹ scambio di colonne di ${}^tA$

$\tilde{A}$

⟹ ${}^t\tilde{A}$ è ottenuta con scambio di colonne di ${}^tA$

⟹ $rg_c({}^tA) = rg_c({}^t\tilde{A})$

OE2 immediato

OE3 vedere note

④ $\tilde{A}$ a scala si ha

$rg_c(\tilde{A}) = rg_c({}^t\tilde{A})$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1j_1} & \cdots & & & \\ \vdots & 0 & & a_{2j_2} & \cdots & a_{rj_r} \\ 0 & 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j_1} & 0 & \vdots & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & a_{2j_2} & & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & a_{rj_r} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

dimostro come prima che

$({}^t\tilde{A})^{(1)}, ({}^t\tilde{A})^{(2)}, \dots, ({}^t\tilde{A})^{r}$ sono

linearmente indipendenti

⟹ $rg({}^t\tilde{A}) \geq r$

ma tutte le altre colonne sono nulle

⟹ $rg_c({}^t\tilde{A}) = r = \#\,\text{pivot} = rg_c \tilde{A}$

⑤ $rg_c A = rg_c \tilde{A} = rg_c({}^t\tilde{A}) = rg_c({}^tA)$

$$\boxed{\Rightarrow rg_c A = rg_c({}^tA)}$$