Esercizi di Geometria
2023/2024 - sesto foglio

November 14, 2023

1.
   - Sia $A \in M_{3,4}$ la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 7 & -3 \\ 6 & 2 & 20 & 4 \end{pmatrix}.$$
   Usando l'algoritmo di Gauss, si determini il rango di A.
   - Si scriva la trasposta ${}^tA \in M_{4,3}$ di A e si calcoli il suo rango, usando l'algoritmo di Gauss.

2. Usando l'algoritmo di Gauss, si determini il rango r di ciascuna delle seguenti matrici e si individuino in tutti i casi r vettori colonna linearmente indipendenti:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:
$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
e si consideri il sottospazio $W = Span(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Si estragga una base di W da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e si determini la dimensione di W.