Rango e determinante

Corollario: sia $A \in M_n(K)$, allora $rg(A) = n$ (ovvero il rango di A è il massimo possibile) se e solo se per ogni $b \in K^n$, il sistema lineare $A \cdot X = b$ è compatibile.

Dim: abbiamo visto nella dimostrazione del teorema di Rouché-Capelli che

$$A \cdot X = b \text{ è compatibile} \iff b \in span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$$

nella nostra situazione abbiamo che $span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq K^n$, e vale che $\dim_K K^n = n$; pertanto

$$rg(A) = n \iff \dim span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = n \iff span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = K^n$$
$$\iff \forall b \in K^n,\ b \in span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \iff$$
$$\iff \forall b \in K^n,\ AX = b \text{ è compatibile.} \qquad \square$$

Ricordiamo ora il teorema di Cramer, il quale ci dice che se $A \in M_n(K)$ ed A è invertibile, allora $\forall b \in K^n$ il sistema lineare $AX = b$ è compatibile.

Prop: sia $A \in M_n(K)$, allora $rg(A) = n$ (ovvero, A ha rango massimo) se e solo se A è invertibile

Dim: "$\Leftarrow$" sia A invertibile, allora per il teorema di Cramer, $\forall b \in K^n$ il sistema $AX = b$ è compatibile, dunque per il corollario precedente $rg(A) = n$

"$\Rightarrow$" supponiamo che $rg(A) = n$, vogliamo mostrare che esiste $B \in M_n(K)$ tale che $AB = BA = \mathbb{1}_n$; è sufficiente costruire B tale che $AB = \mathbb{1}_n$; ora, vale che $AB = \mathbb{1}_n$ se e solo se $A \cdot B^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (i)$ (chiamiamo e_i il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (i)$) se e solo se tutti i sistemi lineari $A \cdot B^{(i)} = e_i$ con $i \in \{1, \dots, n\}$ hanno soluzione; dato che $rg(A) = n$, sappiamo che tutti questi sistemi lineari sono compatibili e dunque le loro soluzioni determinano le colonne di B.

Da questo risultato otteniamo un algoritmo per determinare l'inversa di una matrice quadrata $A \in M_n(K)$ quando essa è invertibile.
Abbiamo visto che per calcolare l'inversa di A dobbiamo risolvere tutti i sistemi lineari del tipo $A \cdot X = e_i$ con $i \in \{1, \dots, n\}$. Cerchiamo di risolverli tutti contemporaneamente, ovvero consideriamo la matrice

$$\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}\right) = (A \mid \mathbb{1}_n)$$

Notiamo che dato che A è invertibile, il suo rango è n, quindi la sua forma a scala dopo l'algoritmo di Gauss è:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

infatti $\tilde{A}$ è una matrice $n \times n$ e dato che $rg(A) = n$, $\tilde{A}$ deve avere n righe non nulle

Usando ancora operazioni elementari possiamo portare $\tilde{A}$ nella forma

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & 0 \\ 0 & 1 & * & \dots * & 0 \\ 0 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \\ 0 & \dots & \dots & & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

Riassumendo, usando operazioni elementari possiamo portare A nella matrice $\mathbb{1}_n$.
Applichiamo ora queste operazioni elementari alla matrice

$$(A \mid \mathbb{1}_n)$$

otteniamo una matrice del tipo

$$(\mathbb{1}_n \mid B) \quad \text{con } B \text{ una certa matrice in } M_n(K)$$

Ora, la matrice di partenza codificava i sistemi $AX = e_i$, le cui soluzioni sono le colonne dell'inversa di A. Le operazioni elementari non cambiano le soluzioni dei sistemi. L'ultima matrice codifica i sistemi lineari $\mathbb{1}_n \cdot X = B^{(i)}$, pertanto le soluzioni di quest'ultimo sistema sono le colonne della matrice inversa di A. Le soluzioni di questo sistema sono proprio le colonne di B, il che ci mostra che B è l'inversa di A.

Esempio: consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$ abbiamo che $rg(A) = 2$ quindi A è invertibile

calcoliamo l'inversa di A.

$$(A \mid \mathbb{1}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

pertanto $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ è l'inversa di $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

Andiamo ora ad associare ad ogni matrice quadrata $A \in M_n(K)$ un elemento di K tramite il quale possiamo determinare se A sia invertibile o meno.
Questo elemento si chiamerà il determinante di A.

Consideriamo $A \in M_2(K)$, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Consideriamo a questo punto la matrice:

$$B = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Svolgiamo il prodotto righe per colonne:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & -a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11} \\ a_{21}a_{22} - a_{21}a_{22} & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

Notiamo quindi che

$$A \text{ è invertibile} \iff a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

e in tal caso l'inversa di A è data da

$$\frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

moltiplicazione per uno scalare.

Infatti $A \cdot \left(\frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} B\right) = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot (A \cdot B) = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$

Def: sia $A \in M_2(K)$, $A = (a_{ij})$; definiamo il determinante di A come lo scalare

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \det(A) \in K$$

Quanto abbiamo visto finora ci permette di enunciare.

Prop: sia $A \in M_2(K)$, allora

$$A \text{ è invertibile} \iff rg(A) = 2 \iff \det(A) \neq 0.$$

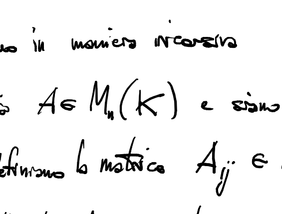
in tal caso, se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, vale che $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1$

$\det(A) \neq 0$, dunque A è invertibile e

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Oss: se $A \in M_2(\mathbb{R})$ e consideriamo i suoi due vettori colonna e supponiamo che valga $a_{ij} > 0 \ \forall i, j \in \{1, 2\}$, allora possiamo rappresentare i due vettori colonna nel piano:



$$m = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \qquad n = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

si può verificare che se P è il parallelogramma determinato dai due vettori colonna di A, allora

$$\det(A) = area(P)$$

Andiamo ora a definire il determinante di una qualsiasi matrice quadrata.
Lo faremo in maniera ricorsiva.

Def: sia $A \in M_n(K)$ e siano $i, j \in \{1, \dots, n\}$ due indici fissati; definiamo la matrice $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$ come la sottomatrice di A ottenuta eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima; tale matrice si dice il minore ij-esimo di A.

Esempio: se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Def: sia $A \in M_n(K)$; definiamo il determinante di A in maniera ricorsiva nel modo seguente:

- se $n = 1$, allora $A = (a_{11})$ e definiamo $\det(A) = a_{11}$
- se $n > 1$, allora definiamo

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det(A_{i1})$$

Esempio: notiamo che con la definizione precedente ritroviamo il determinante di una matrice 2×2:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det(A_{11}) + (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot \det(A_{21})$$
$$= 1 \cdot a_{11} \cdot \det((a_{22})) - 1 \cdot a_{21} \cdot \det((a_{12}))$$
$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & \boxed{2} \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 2 & \boxed{3} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 0 \cdot (0 \cdot 1 - 2 \cdot 3) + 2 \cdot (0 \cdot 1 - 2 \cdot 1)$$
$$= -2 - 0 - 4 = -6$$

Teorema: sia $A \in M_n(K)$, allora

$$A \text{ è invertibile} \iff \det(A) \neq 0$$

Per le matrici 3×3 (e solo per esse) vale la formula di Sarrus:

$$\left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right) \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underbrace{a_{13}a_{21}a_{32}} -$$
$$- \underbrace{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underbrace{a_{11}a_{23}a_{32}} - \underbrace{a_{12}a_{21}a_{33}}$$

Esempio: sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}\right) \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} \qquad \det(A) = 1 + 0 + 0 - 4 - 3 - 0 =$$
$$= 1 - 4 - 3 = -6.$$