Determinante

Prop.: il determinante gode delle seguenti tre proprietà:

D1. (multilinearità)

sia $A \in M_n(K)$ e supponiamo che $A_{(i)} = R_1 + R_2$ (la i-esima riga è la somma di due vettori riga), allora

$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_1 + R_2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} (i) = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_1 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

inoltre se invece $A_{(i)} = c \cdot R$ per qualche $c \in K$ e qualche vettore riga R, allora

$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ c \cdot R \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = c \cdot \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

analoghe proprietà valgono se al posto delle righe consideriamo le colonne.

D2. (alternanza o antisimmetria)

se scambiamo due righe o due colonne di posto, il determinante cambia segno, ovvero

$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

se ci sono k scambi, il segno va dunque moltiplicato per $(-1)^k$

D3. (normalizzazione)

$$\det \mathbb{1}_n = 1$$

Teorema: (teorema di caratterizzazione del determinante)

il determinante è l'unica funzione $M_n(K) \longrightarrow K$ che soddisfa le proprietà D1, D2, D3.

Esempio:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \left(1 \cdot (-2) - 0 + 3 \cdot 0\right) =$$

$$= -8$$

Cor.: i. se A ha due righe uguali, allora $\det(A) = -\det(A)$ (per D2) e dunque $\det(A) = 0$; analogamente per le colonne

ii. se A ha una riga nulla, allora $\det(A) = 0$ (per D1)

Cor.: i. se $\tilde{A}$ è ottenuta da A con una operazione elementare OE1, allora $\det(\tilde{A}) = -\det(A)$

ii. se $\tilde{A}$ è ottenuta da A con una operazione elementare OE2, allora $\det(\tilde{A}) = c \cdot \det(A)$ dove c è lo scalare nell'operazione

iii. se $\tilde{A}$ è ottenuta da A con una operazione elementare OE3, allora $\det(\tilde{A}) = \det(A)$; infatti, se $A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$, allora

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + c \cdot A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} (i)$$

$$\det(\tilde{A}) = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + c \cdot A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \overset{D1}{=} \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} (i)$$

$$\overset{D1}{=} \det(A) + c \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} (i)}_{\text{questa matrice ha due righe righe uguali dunque determinante nullo}} = \det(A)$$

Cor.: se $A \in M_n(K)$ e $\tilde{A}$ è la matrice a scala ottenuta applicando l'algoritmo di gradinizzazione di Gauss ad A, allora

$$\det(\tilde{A}) = \lambda \cdot \det(A) \quad \text{per un certo } \lambda \in K \setminus \{0\}$$

in particolare

$$\det(A) = 0 \iff \det(\tilde{A}) = 0$$

inoltre se nell'algoritmo di gradinizzazione di Gauss non effettuiamo mai la normalizzazione dei pivot a 1, allora $\det(\tilde{A}) = (-1)^k \det(A)$ dove k è il numero di scambi di righe che abbiamo effettuato.

Prop.: se $A \in M_n(K)$ è una matrice triangolare superiore, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ovvero } a_{ij} = 0 \text{ se } i > j$$

allora $\det(A) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Dim.: dimostriamo questo risultato per induzione su n:

$\boxed{n = 1}$ in questo caso $A = (a_{11})$ e $\det(A) = a_{11}$ per definizione, dunque vale la tesi.

$\boxed{\text{passo induttivo}}$ possiamo supporre $n > 1$, allora per definizione:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \det A_{11} - 0 \cdot \det A_{21} + 0 \cdot \det(A_{31}) + \ldots + (-1)^{n+1} \det(A_{n1})$$

$$= a_{11} \cdot \det A_{11}, \quad \text{ma}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{dunque } A_{11} \in M_{n-1}(K) \text{ ed è triangolare superiore}$$

allora posso usare l'ipotesi induttiva su A_{11} e ottenere

$$\det(A_{11}) = a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

pertanto $\det(A) = a_{11} \cdot \det(A_{11}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ □.

Con questi strumenti possiamo dimostrare il risultato secondo cui il determinante caratterizza l'invertibilità o meno di una matrice.

Teorema: sia $A \in M_n(K)$; vale che

$$rg(A) < n \iff \det(A) = 0$$

equivalentemente

$$rg(A) = n \iff \det(A) \neq 0$$

Dim.: "$\Rightarrow$" supponiamo che $rg(A) < n$; sia $\tilde{A}$ la matrice ottenuta da A tramite la gradinizzazione di Gauss; allora $\tilde{A}$ ha una riga nulla, pertanto $\det \tilde{A} = 0$ e ciò è equivalente a $\det A = 0$

"$\Leftarrow$" supponiamo che $\det(A) = 0$; sia $\tilde{A}$ la matrice ottenuta da A tramite la gradinizzazione di Gauss, allora $\det \tilde{A} = 0$; $\tilde{A}$ è a scala e dunque è triangolare superiore, quindi il suo determinante è il prodotto dei suoi elementi della diagonale; pertanto almeno un elemento della diagonale è nullo, e quindi almeno un gradino di $\tilde{A}$ è lungo almeno 2, il che implica che $rg(\tilde{A}) < n$, ovvero $rg(A) < n$

Cor.: sia $A \in M_n(K)$, allora

$$A \text{ è invertibile} \iff \det A \neq 0$$

Dim.: A è invertibile $\iff rg(A) = n \iff \det A \neq 0$.

Vediamo ora che il determinante si può calcolare sviluppandolo rispetto a una qualsiasi colonna o a una qualsiasi riga. Questi risultati sono detti sviluppo di Laplace del determinante.

Teorema: sia $A \in M_n(K)$ e sia $k \in \{1, \ldots, n\}$, allora

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot \det A_{ik}$$

(sviluppo secondo la colonna k-esima)

Teorema: sia $A \in M_n(K)$ e sia $l \in \{1, \ldots, n\}$, allora

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{l+j} \cdot a_{lj} \cdot \det A_{lj}.$$

(sviluppo secondo la riga l-esima)

Esempio: sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

sviluppiamo $\det A$ lungo la seconda colonna:

$$\det A = (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 + 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (1) = -3$$

sviluppiamo $\det A$ lungo la terza riga

$$\det A = (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = -3$$

Cor.: sia $A \in M_n(K)$, allora $\det A = \det {}^tA$

Dim.: $\det {}^tA$ = sviluppo lungo la prima colonna di ${}^tA$ =

= sviluppo lungo la prima riga di A = $\det A$

Oss.: Come capire come prendere i segni nello sviluppo di Laplace? basta osservare che il segno di $(-1)^{i+j}$ è

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

Teorema: siano $A, B \in M_n(K)$, allora

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

(teorema di Binet)

Cor.: sia $A \in M_n(K)$ invertibile, allora $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = \det(A)^{-1}$

Dim.: vale che $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n$, allora per il teorema di Binet e per la proprietà D3 di normalizzazione vale che

$$\begin{array}{ccc} \det(A \cdot A^{-1}) & = & \det(\mathbb{1}_n) \\ \| & & \| \\ \det(A) \cdot \det(A^{-1}) & & 1 \end{array}$$

quindi $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Andiamo ora a determinare una formula esplicita per le entrate della matrice inversa di una matrice data.

Def.: sia $A \in M_n(K)$ e siano $i, j \in \{1, \ldots, n\}$; il cofattore i,j-esimo di A è lo scalare (ovvero, l'elemento di K)

$$(-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

dove ricordiamo che A_{ij} è il minore i,j-esimo di A.

definiamo la matrice dei cofattori di A come quella matrice $\mathrm{cof} A \in M_n(K)$ il cui elemento di posto (i,j) è il cofattore i,j-esimo di A, dunque

$$(\mathrm{cof} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$$

Esempio: sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

cofattore di posto 1,1 : $(-1)^{1+1} \cdot \det((0)) = 0$

cofattore di posto 1,2 : $(-1)^{1+2} \cdot \det((-2)) = 2$

cofattore di posto 2,1 : $(-1)^{2+1} \cdot \det((1)) = -1$

cofattore di posto 2,2 : $(-1)^{2+2} \cdot \det((3)) = 3$

la matrice dei cofattori di A è quindi

$$\mathrm{cof} A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Prop.: sia $A \in M_n(K)$, allora

$$A \cdot {}^t\mathrm{cof} A = (\det A) \cdot \mathbb{1}_n \qquad \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \det(A) \end{pmatrix}$$

in particolare, se A è invertibile, allora

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left({}^t\mathrm{cof} A\right)$$

Dim.: calcoliamo l'entrata di posto (i,j) della matrice $A \cdot {}^t\mathrm{cof} A$:

$$A_{(i)} \cdot \left({}^t\mathrm{cof} A\right)^{(j)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \left({}^t\mathrm{cof} A\right)_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (\mathrm{cof} A)_{jk} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{j+k} \cdot \det A_{jk}$$

si verifica che

* se $i = j$, allora quella precedente è l'espressione di $\det A$
* se $i \neq j$, allora quella precedente è l'espressione del determinante di una matrice con due righe uguali, e quindi vale zero. □