

Logica Lezione 8

Meta-Logica

(Correttezza e Completezza)

- Abbiamo già sottolineato la differenza tra \vdash e \vDash .
- Si tratta di nozioni diverse, definite in termini diversi e riferite a costruzioni diverse:
 - Derivazioni (\vdash), e tavole di verità (\vDash)
 - Sintassi (\vdash), e semantica (\vDash)

- Ma, allo stesso tempo, sappiamo di averli sviluppati per lo stesso scopo:

determinare quali argomenti sono validi.

- Ci aspettiamo quindi che entrambi colgano cosa sono gli argomenti validi.

E ci auguriamo che diano risposte convergenti!

- Ovvero, se un'argomento da A a B è logicamente valida allora:

$$A \vdash B \text{ e } A \vDash B$$

- Analogamente, se qualcosa è una legge logica, ci aspettiamo che

$$\vdash A \text{ e } \vDash A$$

- Speriamo anzi che coincidano:

Se $A \vdash B$, allora $A \vDash B$, e viceversa.

(E, senza premesse, se $\vdash A$, allora $\vDash A$, e viceversa.
ovvero teoremi e tautologie coincidano).

- In altre parole, ci aspettiamo che \vdash e \vDash identifichino lo stesso insieme di argomenti.
- Ma è tutt'altro che scontato che sia così.

- Dimostrare questo (e altri fatti SULLA logica) è il compito della **meta-logica**.

("meta" per "oltre")

- Notare la differenza tra logica e meta-logica.
- L'argomenti di studio della logica:
 - quali argomenti sono validi?
- La meta-logica invece studia la logica stessa!
 - (cioè, ad esempio, le derivazioni e i metodi delle tavole di verità coincidono?).

- È impossibile fare meta-logica, se la logica non è definita in modo rigoroso.
- Per questo motivo la meta-logica è possibile solo se la logica è matematicamente ben definita.
- Definizioni matematiche di derivazioni, di valutazioni semantiche, di tautologia ecc...

- In questa sede, ci limitiamo ad abbozzare tali definizioni e a saltare una trattazione puramente matematica.
- Ma abbiamo detto più volte che un trattamento matematico così rigoroso è possibile.

- I meta-teoremi più importanti sulla logica proposizionale sono due:

(meta)teorema di correttezza

e il

(meta)teorema di completezza

Nota:

si tratta di META-teoremi e non di teoremi, perché non dimostriamo una fbf ottenuta con la deduzione naturale.

Dimostriamo, fuori dal calcolo, una proprietà generale delle nostre derivazioni logiche e della nostra semantica formale.

1. Teorema di correttezza

- Supponiamo di dimostrare un teorema $\vdash A$.
- Possiamo essere sicuri che A è sempre vero?
 - (cioè che la sua tavola di verità dà sempre 1? cioè che è una tautologia?).

- In altre parole,
- possiamo dimostrare che

se $\vdash A$,

allora $\vDash A$?

- Sì.

E questo è il teorema di correttezza.

- Dimostra che tutte le nostre derivazioni di **teoremi** dimostrano solo **tautologie**.

- Si dimostra per induzione.

→ Quindi è fondamentale che l'insieme delle fbf sia un insieme induttivo.

(Saltiamo la dimostrazione)

Teorema di correttezza generale

- Possiamo anche dimostrarlo più in generale per i *sequenti*, mostrando che

se

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$$

allora

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vDash B$$

Teorema di completezza

- Supponiamo ora di avere un argomento che sappiamo essere *semanticamente valido*.
- Esiste anche una *derivazione* corrispondente?

- Forse si potrebbe verificare una situazione del genere:

l'argomento è semanticamente valido,

ma non riusciamo a trovare una derivazione perché,
semplicemente, non c'è'.

- Come facciamo a sapere che le nostre derivazioni sono sufficientemente potenti da coprire tutti gli argomenti logicamente validi?
- Come facciamo a sapere che, se l'argomento è valido, esiste sempre una derivazione?
- Come facciamo a sapere che il nostro calcolo è **completo** in questo senso?

Cioe` che abbiamo tutte le regole che ci servono per ottenere tutti gli argomenti logicamente validi?

- Questo è il contenuto della teorema di **completezza**
- Esso afferma che se un argomento da A_1, A_2, \dots, A_n a B è semanticamente valido,
allora esiste una **derivazione** dalle premesse A_1, A_2, \dots, A_n a B .

- Ovvero,

il teorema di completezza afferma che

se $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$

allora

$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$

- Analogamente al caso del teorema di correttezza, esiste anche una versione più ristretta del teorema di completezza:

se una proposizione è una tautologia, allora è anche un teorema del calcolo.

Se $\models A$

allora $\vdash A$

- La dimostrazione e' particolarmente laboriosa, e matematicamente non banale.

(Noi saltiamo la dimostrazione)

- Si noti che, presi insieme, i due (meta)teoremi dicono qualcosa di molto importante sulla nostra logica e sul calcolo in particolare:
- Dicono che il nostro **calcolo** è **corretto** (tutti i suoi risultati sono semanticamente validi)
- ed è **completo** (copre tutti gli argomenti validi).

- Il fatto che la nostra logica abbia queste caratteristiche è notevole!

- Nota

puo' darsi che questi risultati non vi suonino molto sorprendenti, perché forse vi aspettavate che reggessero fin dall'inizio.

- Ma non sono ovvi e anzi per altre logiche calcoli questi meta-teoremi possono fallire! (la logica del second'ordine, ad esempio, non e` completa!)

- Anche l'aritmetica (e in generale la matematica) non è completa in questo senso!

Per l'aritmetica non c'è “un calcolo o che ci permette di ottenere tutte e sole le verità matematiche.

(Questo è il famoso teorema di incompletezza dell'aritmetica di Gödel).

- Si noti che e` spiacevole, ma non disastroso, non avere la completezza.
- Ma assolutamente non possiamo rinunciare alla correttezza.
- Altrimenti significa che le nostre derivazioni potrebbero dimostrare argomenti non validi e falsi teoremi!

- Possiamo invece convivere con un calcolo incompleto.
 - Un calcolo incompleto è qualcosa di corretto, ma non abbastanza forte da dare tutto ciò che vogliamo.
- Tutto ciò che dimostra è buono, ma non dimostra tutti i buoni risultati.