LE RESERVE TECNICHE

Sono fondi **non liberi da impegni**, debiti nei confronti degli assicurati, **passività**, derivanti dalla gestione tecnica. Le principali:

- la **riserva premi**: i premi sono pagati (in tutto o in parte) in via anticipata, allora, ad una fissata epoca, la riserva premi è **una valutazione di quanto l'assicuratore dovrà pagare in futuro per spese e per sinistri che si verificheranno nel periodo di durata residua dei contratti, a fronte dei premi già incassati**,

- la **riserva sinistri**: la durata che contraddistingue i processi di liquidazione dei sinistri può essere più o meno lunga, allora, ad una fissata epoca, la riserva sinistri è **una valutazione di quanto l'assicuratore dovrà pagare in futuro per risarcimenti e relative spese a fronte di sinistri che si sono già verificati e che non sono stati ancora completamente pagati**.

La notevole incidenza dei valori di tali riserve comporta la necessità di una loro valutazione accurata, per salvaguardare l'equilibrio economico finanziario dell'impresa, che dipende in primo luogo della gestione tecnica.

A tutela degli assicurati la legislazione assicurativa

- prevede principi di valutazione delle riserve tecniche,
- disciplina gli attivi a copertura delle riserve tecniche.

In particolare,

- Dlgs 173/97,
- Solvency II (Direttiva 2009/138/CE, entrata in vigore il 1 gennaio 2016),
- IFRS 17-Insurance Contracts (18 maggio 2017, entrerà in vigore 2023).

Dapprima vediamo la normativa in vigore Dlgs 173/97.

RISERVA PREMI (Dlgs 173/97, Art.32)

Motivazione: accantonamento per la copertura dei rischi nei periodi di validità dei contratti dopo la chiusura dell'esercizio, a fronte dei premi già incassati.

La riserva alla chiusura di un esercizio è costituita da due componenti

- Riserva per frazioni di premi,
- Riserva per rischi in corso.

Riserva per frazioni di premi

Metodi di calcolo:

- *pro rata temporis* sulla base dei premi lordi contabilizzati, dedotte solo le provvigioni di acquisizione e le altre spese di acquisizione limitatamente ai costi direttamente imputabili,
- metodo forfettario, 35% dei premi lordi contabilizzati $P^T(1)$ (40% per rischi RCA, 15% per rischi di breve durata).

Esempio. Riserva per frazioni di premio con il metodo *pro rata temporis* alla chiusura dell'anno θ, contratti stipulati nel corso dell'anno.

- Contratto di durata annuale, premio unico P^T, con α' aliquota provvigioni acquisizione, durata residua t (unità di misura l'anno): $P^T(1-\alpha')t$.

  Es. Contratto di durata annuale 1/10/θ-30/9/$\theta+1$: $P^T(1-\alpha')\left(1-\frac{31+30+31}{365}\right)$ $= P^T(1-\alpha')\frac{273}{365}$.

- Contratto di durata annuale 1/10/θ-30/9/$\theta+1$, con premi rateizzati, P_1 scadenza 1/10/θ, P_2 scadenza 1/4/$\theta+1$ (premi al netto spese di acquisizione): $P_1\frac{31+28+31}{182} = P_1\frac{90}{182}$.

- Contratto di durata 5 anni 1/10/θ-30/9/$\theta+5$, a premio unico P^T, con α' aliquota provvigioni acquisizione relativa all'esercizio: $P^T(1-\alpha')\left(\frac{4}{5}+\frac{273}{5\times365}\right)$.

Osservazione 1. Se indichiamo con $\{S(t), t \geq 0\}$ il processo del risarcimento cumulato per una fissata polizza, con

$$S(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h,$$

dove

- $N(t)$ è il numero di sinistri che colpiscono la polizza in $[0, t]$,
- Y_h è l'importo del risarcimento per il sinistro *h*-esimo,

e accogliamo le ipotesi del modello della Teoria collettiva del rischio, allora $\{S(t), t \geq 0\}$ è un processo Poisson composto (λ, F_Y) e si ha

$$E\big(S(t+\Delta t) - S(t)\big) = \lambda \Delta t E(Y) = \lambda E(Y) \Delta t = E\big(S(t+1) - S(t)\big)\Delta t,$$

il risarcimento atteso in un intervallo di tempo è proporzionale alla durata. Si ha una giustificazione del metodo *pro rata temporis*.

Ma il processo Poisson composto è ad incrementi stazionari. Effetti di stagionalità, variazioni nella sinistrosità possono rendere tale condizione inaccettabile.

Osservazione 2. Nel modello visto in Matematica att.le danni, nel quale le polizze erano tutte di durata annuale, la riserva premi alla chiusura di un esercizio

$$R_P(1) = \sum_{h=1}^{n} P_h^T (1-\alpha')t_h.$$

Se c'è "uniformità" nella stipulazione dei contratti nel corso dell'anno,

$$R_P(1) \cong \frac{1}{2} P^T(1)(1-\alpha').$$

Con $\alpha' = 0.30$, si ha $R_P(1) \cong 0.35P^T(1)$.

Si ha una giustificazione del metodo forfettario.

Riserva per rischi in corso

Motivazioni: se valuta che la riserva per frazioni di premi più le rate di premi futuri, per contratti già stipulati, non siano adeguati a coprire i rischi che dovrebbero coprire, è necessario effettuare un'integrazione dell'importo riservato.

L'inadeguatezza della riserva per frazioni di premi può derivare da

- fenomeni di stagionalità,
- aggravamento del rischio: incremento del numero atteso di sinistri, del costo medio per sinistro,
- rendimenti dagli investimenti inferiori agli attesi,
- insufficienza dei caricamenti per spese.

Metodi di calcolo (Provvedimento ISVAP 21 gennaio 1999):

- Criterio analitico: calcolare la tariffa tenendo conto delle nuove basi tecniche e delle nuove valutazioni delle spese. Se il premio per una polizza in essere con durata residua t è, nella nuova tariffa, maggiore di quello che è stato applicato $\bar{P}^T > P^T$, si valuta che l'accantonamento a riserva sulla base del nuovo stato di informazione sarebbe $\bar{P}^T(1-\bar{\alpha})t$, mentre l'accantonamento come riserva per frazioni di premi ammonta a $P^T(1-\alpha')t$, allora la differenza $\bar{P}^T(1-\bar{\alpha})t - P^T(1-\alpha')t > 0$ deve essere appostata nella riserva per rischi in corso.

- Calcolo semplificato: si considera
  - un indice di sinistralità, il *combined ratio*

$$\text{CR} = \frac{\text{pagato} + \text{riservato} + \text{spese di liquidazione, per sinistri dell'esercizio}}{\text{premi di competenza dell'esercizio, al netto delle spese di acquisizione}}$$

Notiamo che CR è una stima dei risarcimenti per unità di premi.

  - RFP riserva per frazioni di premio, calcolata con il metodo pro rata temporis,
  - FP le rate di premi futuri, per i contratti in essere.

Se CR > 1, per i contratti in essere si ha

$$\underbrace{CR^*(RFP+FP)}_{\text{stima dei risarcimenti futuri}} > \underbrace{RFP+FP}_{\text{volume dei premi}}$$

Allora, la differenza CR*(RFP+FP) – (RFP+FP) va accantonata nella riserva per rischi in corso. In tale modo la riserva per frazioni di premi sommata alle rate di premi futuri e alla riserva per rischi in corso consente di coprire la stima dei risarcimenti per i sinistri futuri per contratti in essere.

RISERVA SINISTRI

Ricordiamo il processo che si può generare in relazione ad un sinistro

accadimento denuncia liquidazione chiusura

___↓___________↓_______↓__↓__↓____________↓_______↓____________

t_1 t_2 t_3 t_4

← IBNR → pagamenti parziali

← *Outstanding loss liability* →

Diversi fattori possono comportare che vi sia un ritardo nel pagamento completo del risarcimento per un sinistro, rispetto alla data di accadimento:

- contenziosi, procedure legali,
- può essere complesso valutare l'entità di alcuni sinistri,
- alcuni sinistri non sono immediatamente denunciati,
- … .

Ricordiamo che un sinistro chiuso può essere riaperto, che alcuni sinistri possono essere chiusi senza seguito.

Secondo il Dlgs 193/97, Art. 33, la riserva deve essere accantonata per

- sinistri denunciati, ma non ancora (completamente) pagati (*Reported But Not Settled*, RBNS, o *Reported But Not Enough Settled*, RBNES),
- sinistri accaduti, ma non ancora denunciati (sinistri tardivi, *Incurred But Not Reported*, IBNR),
- spese di liquidazione
  - spese direttamente imputabili (*Allocated Loss Adjustment Expenses*, ALAE), es. spese per legali o periti esterni, usualmente incluse negli importi di risarcimento,
  - spese non direttamente imputabili (*Unallocated Loss Adjustment Expenses*, ULAE), es. costi degli uffici liquidativi, del personale addetto alla liquidazione dei sinistri (spese interne), non sono incluse nei costi dei sinistri e devono essere valutate separatamente.

Sottolineiamo: prudente valutazione, costo ultimo, è vietata qualsiasi deduzione o sconto.

Per la valutazione,

- in linea di principio, separata per ciascun sinistro (*),
- limitatamente alla generazione di bilancio, per gruppi di sinistri omogenei e sufficientemente numerosi, il “criterio del costo medio” (**).

(*) Il “**metodo dell’inventario**” (***case reserve***): i liquidatori valutano l’entità del risarcimento caso per caso sulla base della documentazione per i sinistri aperti.

(**) **Metodi statistico-attuariali**: si tratta di un grande numero di tecniche che, per settori d’affari nei quali si disponga di adeguate basi di dati, tramite i dati e opportuni modelli consentono di ottenere una valutazione dell’importo da pagare. I modelli possono essere di tipo deterministico o stocastico.

Problema della valutazione della riserva sinistri

La valutazione di tale riserva è complessa. Infatti, per un sinistro che si sia già verificato

- l'importo da liquidare può essere non noto, aleatorio,
- il differimento del pagamento può non essere noto e può essere elevato, a causa della difficoltà di valutazione del sinistro o di procedimenti legali,
- il sinistro potrebbe non essere stato ancora denunciato,
- può accadere che siano stati effettuati pagamenti parziali durante il processo di liquidazione,
- si devono formulare previsioni per il futuro di grandezze finanziarie e non finanziarie (inflazione, redditività degli investimenti, mutamenti della legislazione, orientamenti della giurisprudenza).

Circa l'inflazione, sottolineiamo che uno stesso tipo di sinistro che provochi un danno "analogo" in epoche diverse può avere costi diversi per

- presenza di inflazione monetaria dello specifico settore d'affari,
- tendenze legislative e giurisprudenziali.

Si parla di ***claims inflation*** = inflazione monetaria del settore+*super-imposed inflation*.

E’ molto importante che la valutazione sia accurata, perché la riserva sinistri è una importante voce di bilancio, soggetta al **controllo “esterno”**, da parte dell’Autorità di Vigilanza (IVASS), investitori, agenti di mercato, assicurati, e anche al **controllo “interno”**, controllo della gestione da parte della compagnia. Può intervenire, ad esempio,

- nella tariffazione,
- in valutazioni di redditività.

I sinistri che avvengono in circostanze chiare, nei quali le responsabilità sono inequivocabilmente attribuibili, e per i quali la valutazione del danno non sia particolarmente complessa sono generalmente liquidati in tempi brevi.

I sinistri che vengono riservati sono quelli che

- richiedono accertamenti giudiziari delle circostanze e/o delle responsabilità,
- presentano complessità nella valutazione (ad esempio, danni a persone).

Processo di smontamento della riserva

Si considera l'accantonamento della riserva sinistri per i sinistri, di una determinata tipologia, avvenuti in un fissato esercizio θ (una fissata **generazione di sinistri**) e si segue anno dopo anno (periodo dopo periodo) l'evoluzione dell'accantonamento determinata da

- diminuzioni per pagamenti totali o parziali o per annullamenti,
- aumenti per effetto di riaperture,
- aumenti o diminuzioni per effetto di rivalutazioni,

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & \theta & & \theta+1 & & \theta+2 & & & & \theta+t & \\
\downarrow & \underline{\qquad\qquad} & \downarrow & \underline{\qquad\qquad} & \downarrow & \underline{\qquad\qquad} & \downarrow & \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & \downarrow & \underline{\qquad\qquad} & \downarrow \\
 & & R_{S,\theta}(\theta) & & R_{S,\theta}(\theta+1) & & & & & & R_{S,\theta}(\theta+t)=0
\end{array}
$$

dove $R_{S,\theta}(\theta+k)$, $k=0,\dots,t$, è la riserva per sinistri di generazione θ, valutata alla chiusura dell'esercizio $\theta+k$.

La **durata del processo di smontamento**, t, dipende dalla tipologia di sinistri. Ci sono rami a breve smontamento ($t=4/\,5$ anni), rami a lungo smontamento (es. RCA).

METODI STATISTICO-ATTUARIALI PER LA VALUTAZIONE DELLA RISERVA SINISTRI

Per tipologie di sinistri per le quali siano disponibili adeguate basi di dati, sono proposti metodi statistico-attuariali per la valutazione della riserva: ad una fissata epoca, si valutano gli importi da pagare in futuro per sinistri già avvenuti e non (completamente) risarciti utilizzando i dati sui risarcimenti effettuati in passato e modelli che possono essere di tipo deterministico o stocastico.

Tali metodi non possono, generalmente, essere applicati per

- sinistri particolari di natura catastrofale,
- sinistri che richiedono valutazioni articolate e complesse,
- sinistri per i quali la base di dati non sia adeguata.

Metodi deterministici

Si tratta di un grande numero di tecniche, largamente utilizzate nella pratica attuariale, che sulla base dei dati e di opportuni algoritmi forniscono una stima globale degli importi da pagare per un fissato portafoglio.

Sono stati spesso introdotti empiricamente, ma in molti casi sono stati poi giustificati mediante metodologie statistiche.

Permettono di ottenere una stima puntuale, una ***best estimate***, dei pagamenti futuri.

Il vantaggio è che sono molto semplici da applicare.

Metodi basati su modelli stocastici

Si introducono modelli stocastici per le quantità di interesse, i parametri sono stimati dai dati.

Consentono di ottenere oltre alle stime dei valori attesi o di altri valori centrali, anche valutazioni sulla qualità delle stime tramite indicatori di dispersione (varianze, errori di previsione, intervalli di confidenza).

In alcuni modelli è possibile valutare l'intera distribuzione di probabilità delle grandezze di interesse.

Nella letteratura attuariale sono proposti molti modelli stocastici per la valutazione della riserva sinistri.

In tempi recenti, l'interesse per tali modelli si è diffuso anche nella pratica attuariale, per effetto delle nuove normative sui requisiti di solvibilità (Solvency II) e sui principi contabili internazionali (IAS/IFRS), che richiedono di fornire, oltre ad una stima dei pagamenti in sospeso, anche misure di qualità della stima.

Schema generale per dati aggregati

Consideriamo la valutazione della riserva sinistri alla fine dell'anno di calendario θ, per una fissata tipologia di sinistri, per un portafoglio omogeneo.

Indichiamo con i il **periodo di origine** di un sinistro. Il periodo di origine può essere

- il periodo (anno, semestre, trimestre, …) che contiene la data di **accadimento** del sinistro,
- il periodo di **denuncia** del sinistro,
- il periodo di **sottoscrizione** della polizza.

Nei modelli con dati aggregati, i sinistri con periodo di origine i sono trattati nel loro complesso.

Supponiamo che nel portafoglio in esame la durata del processo di smontamento della riserva sia di t periodi. Allora, lo sviluppo dei pagamenti per i sinistri del periodo di origine i ha luogo nei **periodi di calendario** o **di pagamento**

$$i, i+1, \dots, i+t.$$

Nota. In pratica, si indica con t il differimento entro il quale la maggior parte dei sinistri di ciascuno dei periodi di origine viene chiusa e si assume che entro $t+1$ periodi tutti i sinistri siano chiusi. Sinistri che richiedono tempi più lunghi per la chiusura sono, spesso, trattati a parte e, per tali "code", sono introdotti termini di correzione nella valutazione della riserva.

Indichiamo con j, $j = 0, 1, \ldots, t$, i **periodi di sviluppo** o **differimento** dei pagamenti rispetto al periodo di origine.

Per semplicità, supponiamo che l'unità di tempo che definisce i periodi di origine e differimento sia la medesima e, per fissare l'attenzione, supponiamo che tale unità sia l'anno.

Allora, alla chiusura dell'anno θ, ci possono essere sinistri il cui pagamento non è stato completato per gli anni di origine $\theta - t + 1, \ldots, \theta - 1, \theta$, mentre i sinistri con anno di origine $\leq \theta - t$ sono trattati come chiusi.

Per svincolarsi dal particolare anno di calendario θ, è conveniente codificare gli anni di origine ponendo $i = 0, \ldots, t$ con

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & \theta - t & & \theta - t + 1 & & & & & & \theta & \\
\downarrow & \underline{\hspace{1.5cm}} & \downarrow & \underline{\hspace{1.5cm}} & \downarrow & \underline{\hspace{1.5cm}} & \downarrow & \underline{\hspace{4cm}} & \downarrow & \underline{\hspace{1.5cm}} & \downarrow \\
 & 0 & & 1 & & & & & & t &
\end{array}$$

Indichiamo con Y_{ij}, $i, j = 0, \ldots, t$, una grandezza di interesse relativa all'anno di origine i e all'anno di differimento j. Ad esempio, Y_{ij} può rappresentare

- P_{ij} pagamenti per sinistri di origine i, effettuati con differimento j, ovvero nell'anno $i + j$ (**pagamenti incrementali**),
- C_{ij} pagamenti per sinistri di origine i effettuati con differimento minore o uguale a j (**pagamenti cumulati**). Si ha $C_{ij} = \sum_{h=0}^{j} P_{ih}$,
- P_{ij}^F (C_{ij}^F) l'importo complessivamente pagato per sinistri di origine i chiusi (*finalized*) con differimento j (con differimento minore o uguale a j), (comprende le somme di eventuali pagamenti parziali effettuati prima di $i + j$),

- P_{ij}/w_{ij} (C_{ij}/w_{ij}) pagamenti incrementali (cumulati) rapportati ad una grandezza che fornisca una misura dell'esposizione. Per esempio, $w_{ij} = w_i$, per ogni j, pari al numero di polizze o al numero totale di sinistri o ai premi di competenza dell'anno di origine i,
- P^*_{ij} $(C^*_{ij} = \sum_{h=0}^{j} P^*_{ih})$ pagamenti incrementali (cumulati) per sinistri di origine i, espressi in valore monetario dell'epoca di valutazione; se $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sono tassi annui di inflazione (*claims inflation*), per $i + j \le t$, $P^*_{ij} = P_{ij}\big(1 + \varphi_{i+j+1}\big) \ldots (1 + \varphi_t)$,

$$\begin{array}{cccccccc} & 0 & & 1 & & & i+j & & i+j+1 & & & t & \\ \downarrow & \_\_\_\_ & \downarrow & \_\_\_\_ & \downarrow & \_\_\_\_ & \downarrow & \_\_\_\_ & \downarrow & \_\_\_\_ & \downarrow & \_\_\_\_\_\_\_\_ & \downarrow & \_\_\_\_ & \downarrow \\ & & \rightarrow & & & & & & \rightarrow & & & & \rightarrow & & \\ & & \varphi_1 & & & & & & \varphi_{i+j+1} & & & & \varphi_t & & \end{array}$$

- I_{ij} importo totale dei risarcimenti per sinistri di origine i, valutato alla fine dell'anno $i + j$, dato dalla somma tra l'importo totalmente pagato C_{ij} e le stime dell'inventario dell'impegno residuo (***incurred losses***),
- N_{ij} (N^c_{ij}) numero di pagamenti per sinistri di origine i effettuati con differimento j $(\le j)$,
- D_{ij} numero di sinistri dell'anno di origine i denunciati con differimento j,
- …

Con riferimento ai dati disponibili, supponiamo che siano noti i valori di Y_{ij}, per $i + j \leq t$, rappresentati nel **triangolo superiore** della **tabella di sviluppo** o **di *run-off***.

	Anno di differimento						
Anno di origine	0	$\dots$	j	$\dots$	$t-i$	$\dots$	t
0	Y_{00}	$\dots$	Y_{0j}	$\dots$	$Y_{0,t-i}$	$\dots$	Y_{0t}
$\dots$	$\dots$		$\dots$		$\dots$		
i	Y_{i0}	$\dots$	Y_{ij}	$\dots$	$Y_{i,t-i}$		$Y_{i,t}$
...	$\dots$						
$\dots$	$\dots$						
$t-1$	$Y_{t-1,0}$						
t	Y_{t0}		$Y_{t,j}$				$Y_{t,t}$

Tabella di *run-off*

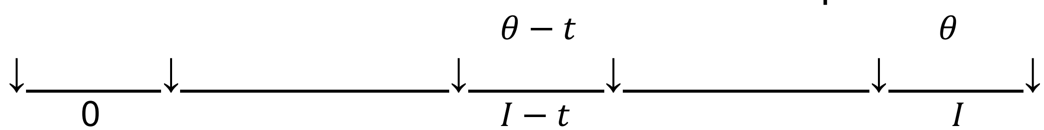
Nella tabella, le righe sono legate agli anni di origine, le colonne agli anni di differimento, le diagonali agli anni di calendario (o di pagamento).

L'obiettivo dei metodi di riservazione è ottenere **previsioni** per le grandezze del **triangolo inferiore** Y_{ij}, per $i + j > t$, che non sono noti in quanto relativi ad anni futuri, a partire dai dati del triangolo superiore.

Nei **modelli stocastici** $\{Y_{ij}, i, j = 0, \dots, t\}$ è trattato come un processo di numeri aleatori per i quali è formulata una ipotesi probabilistica. I dati del triangolo di *run-off* sono visti come un campione osservato di Y_{ij}, per $i + j \leq t$, e da tali dati si stimano i parametri del modello. Dal modello stimato si ottengono previsioni per le grandezze del triangolo inferiore.

Nei **metodi deterministici**, non si formulano ipotesi probabilistiche, si introduce un modello deterministico. I valori Y_{ij}, per $i + j \leq t$, sono noti e da tali dati, con opportuni algoritmi, si ottengono stime dei parametri del modello e "proiezioni" per le grandezze del triangolo inferiore.

Nota. Sono considerate anche altre strutture di dati. Ad esempio



	0			t
0				
$I - t - 1$				
$I - t$				
I				

METODI DETERMINISTICI

METODO DELLA CATENA (CHAIN-LADDER CL)

Le grandezze di interesse sono i pagamenti cumulati C_{ij}, $i, j = 0, \dots, t$.

	Anno di differimento					
Anno di origine	0	$\dots$	$\dots$	$t-i$	$\dots$	t
0	C_{00}			$C_{0,t-i}$		C_{0t}
$\dots$						
i	C_{i0}			$C_{i,t-i}$		$C_{i,t}$
...						
$\dots$						
t	C_{t0}					$C_{t,t}$

Tabella di *run-off*

Per l'anno di origine i,

- i **dati** sono i C_{ij}, per $j \leq t - i$,
- $C_{i,t-i}$ è il pagamento cumulato fino all'anno di valutazione t,
- C_{it} è il costo complessivo, detto **costo ultimo** (***ultimate claim amount***),
- $C_{it} - C_{i,t-i}$ è l'importo da pagare dopo t, i pagamenti in sospeso (***outstanding loss liabilities***, OLL).

Se $\hat{C}_{it}$ è una stima del costo ultimo C_{it}, la "riserva", stima delle OLL, è

$$R_i = \hat{C}_{it} - C_{i,t-i}.$$

Obiettivo del metodo è stimare gli elementi mancanti della tabella ed in particolare gli elementi dell'ultima colonna $C_{it}, i = 1, \dots, t$.

Il modello

Si assume che $C_{ij} > 0$, $C_{ij} \geq C_{i,j-1}$ (ovvero $P_{ij} \geq 0$), $i, j = 0, \dots, t$.

L'ipotesi base è che i rapporti tra pagamenti cumulati consecutivi,

$$\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}},$$

non dipendano dall'anno di origine, ma solo dal differimento, ovvero che esistano $f_0, \dots, f_{t-1}$ numeri positivi tali che

$$\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} = f_{j-1} \Leftrightarrow C_{ij} = C_{i,j-1} f_{j-1}, \quad i = 0, \dots, t, j = 1, \dots, t.$$

I parametri $f_0, \dots, f_{t-1}$ sono detti **fattori di sviluppo** o ***development factors*** or ***link ratios***.

Notiamo che $f_{j-1} \geq 1$.

Proposizione. Esistono $f_0, \ldots, f_{t-1}$, positivi, tali che $\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} = f_{j-1}$, $i = 0, \ldots, t, j = 1, \ldots, t$ $\Leftrightarrow$ esistono $\alpha_0, \ldots, \alpha_t$, positivi, $r_0, \ldots, r_t$, non negativi, con $r_0 > 0$, tali che $P_{ij} = \alpha_i r_j$, $i, j = 0, \ldots, t$.

Dim.

$\Leftarrow$) Fissati i, j, $C_{ij} = \sum_{h=0}^{j} P_{ih} = \alpha_i \sum_{h=0}^{j} r_h$ e $C_{i,j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} P_{ih} = \alpha_i \sum_{h=0}^{j-1} r_h$. Allora,

$$\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} = \frac{\alpha_i \sum_{h=0}^{j} r_h}{\alpha_i \sum_{h=0}^{j-1} r_h} = \frac{\sum_{h=0}^{j} r_h}{\sum_{h=0}^{j-1} r_h} > 0$$

$\uparrow$ non dipende da i, $\triangleq f_{j-1}$

$\Rightarrow$) Fissato i, si ha $P_{i0} = C_{i0}$, e per $j \geq 1$, $P_{ij} = C_{ij} - C_{i,j-1}$.

Esprimiamo C_{ij} tramite C_{it}. Dall'ipotesi del modello,

$$C_{i,j+1} = C_{ij} f_j$$

$$C_{i,j+2} = C_{i,j+1} f_{j+1} = C_{ij} f_j f_{j+1}$$

$$\ldots$$

$$C_{it} = C_{i,t-1} f_{t-1} = \cdots = C_{ij} f_j f_{j+1} \ldots f_{t-1}$$

Pertanto, per ogni i, j,

$$C_{ij} = C_{it} \frac{1}{\prod_{h=j}^{t-1} f_h} = C_{it} \prod_{h=j}^{t-1} f_h^{-1}.$$

Segue

$$P_{i0} = C_{i0} = C_{it} \ \frac{1}{\prod_{h=0}^{t-1} f_h},$$

$$\alpha_i \triangleq \nearrow \qquad\qquad \nwarrow \triangleq r_0 > 0$$

e, per $j \geq 1$,

$$P_{ij} = C_{ij} - C_{i,j-1} = C_{it} \left[\frac{1}{\prod_{h=j}^{t-1} f_h} - \frac{1}{\prod_{h=j-1}^{t-1} f_h}\right] = C_{it} \ \frac{f_{j-1} - 1}{\prod_{h=j-1}^{t-1} f_h}$$

$$\alpha_i \triangleq \nearrow \qquad\qquad \nwarrow \triangleq r_j \geq 0 \quad \blacksquare$$

Pertanto, i pagamenti incrementali P_{ij} possono essere rappresentati mediante un **modello moltiplicativo**

$$P_{ij} = \alpha_i r_j, \; i, j = 0, \dots, t,$$

nel quale **un fattore dipende solo dall'anno di origine**, α_i, **l'altro dipende solo dal differimento**, r_j.

Interpretazione dei parametri. Nel modello $P_{ij} = \alpha_i r_j,\ i,j = 0, \dots, t$, poiché si può supporre che $\sum_{j=0}^{t} r_j = 1$, i parametri possono essere interpretati

- α_i costo ultimo per l'anno di origine i, $\alpha_i = C_{it}$,
- r_j la quota del costo ultimo pagata con differimento j, **indipendente da** i.

L'ipotesi sottostante il metodo della catena è dunque che, per ogni j, la quota del costo ultimo pagata con differimento j è la stessa per ogni anno di origine. **Lo sviluppo dei pagamenti è stabile al variare degli anni di origine**.

Osservazione. Naturalmente è inadeguato considerare un modello deterministico. La stessa critica si applica a tutti i metodi deterministici di valutazione della riserva sinistri.
Pertanto, nel metodo della catena, le relazioni

$$\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} = f_{j-1}, \qquad\qquad P_{ij} = \alpha_i r_j$$

dovrebbero essere intese, in qualche senso, in termini attesi, ad esempio $E(P_{ij}) = \alpha_i r_j$.
Sono proposti diversi modelli stocastici che forniscono le stesse stime del metodo CL.

Dall'ipotesi del modello,

$$C_{i,t-i+1} = C_{i,t-i} f_{t-i}$$

$$C_{i,t-i+2} = C_{i,t-i+1} f_{t-i+1} = C_{i,t-i} f_{t-i} f_{t-i+1}$$

Ricorsivamente, si ha

$$C_{ij} = C_{i,t-i} \prod_{h=t-i}^{j-1} f_h, \quad i + j > t. \text{ (*)}$$

Per l'anno di origine i, il costo ultimo è rappresentato da

$$C_{it} = C_{i,t-i} \prod_{h=t-i}^{t-1} f_h,$$

i pagamenti in sospeso sono

$$C_{it} - C_{i,t-i} = C_{i,t-i}\left(\prod_{h=t-i}^{t-1} f_h - 1\right).$$

Stima dei parametri $f_0, \dots, f_{t-1}$

Dall'ipotesi del modello, $C_{ij} = C_{i,j-1} f_{j-1}$ per ogni i, j, segue

$$\sum_{i \in I} C_{ij} = \sum_{i \in I} C_{i,j-1} f_{j-1}, \quad \text{per ogni } I \subset \{0, \dots, t\},$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f_{j-1} = \frac{\sum_{i \in I} C_{ij}}{\sum_{i \in I} C_{i,j-1}}.$$

Per stimare il fattore di sviluppo f_{j-1} si considera come insieme I il più grande insieme di anni di origine per il quale si dispone dei dati

$$\hat{f}_{j-1} = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} C_{ij}}{\sum_{i=0}^{t-j} C_{i,j-1}}$$

	Anno di differimento					
Anno di origine	0	…	$j-1$	j	…	t
0	C_{00}		C_{0j-1}	C_{0j}		C_{0t}
…			…	…		
$t-j$			$C_{t-j,j-1}$	$C_{t-j,j}$		
…			$C_{t-j+1,j-1}$			
…						
t	C_{t0}					

Notiamo che

$$\hat{f}_{j-1} = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} C_{ij}}{\sum_{i=0}^{t-j} C_{i,j-1}} = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} C_{i,j-1} \dfrac{C_{ij}}{C_{i,j-1}}}{\sum_{i=0}^{t-j} C_{i,j-1}},$$

$\hat{f}_{j-1}$ è media ponderata dei rapporti $\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}}$, $i = 0, \dots, t-j$, con pesi i pagamenti cumulati dell'anno di sviluppo $j-1$. Pertanto,

$$min\{C_{ij}/C_{i,j-1} |\ i = 0, \dots, t-j\} \leq \hat{f}_{j-1} \leq max\{C_{ij}/C_{i,j-1} |\ i = 0, \dots, t-j\}.$$

Le previsioni dei pagamenti cumulati del triangolo inferiore, per l'anno di origine i, sono ottenuti dalla (*), sostituendo i parametri con le loro stime

$$\hat{C}_{ij} = C_{i,t-i} \prod_{h=t-i}^{j-1} \hat{f}_h, \quad i + j > t,$$

la stima del costo ultimo è

$$\hat{C}_{it} = C_{i,t-i} \prod_{h=t-i}^{t-1} \hat{f}_h,$$

la riserva è

$$R_i = \hat{C}_{it} - C_{i,t-i} = C_{i,t-i}\left(\prod_{h=t-i}^{t-1} \hat{f}_h - 1\right).$$

Notiamo che dipende dal pagamento cumulato osservato al momento della valutazione e dalle stime dei *link ratio*.

Osservazioni

- Le stime dei *link ratio* possono essere ottenute come medie ponderate dei **"*link ratio* osservati"**, $\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}}$, usando pesi diversi rispetto a quelli del metodo base (**metodi dei *link ratio***)

$$\hat{f}_{j-1} = \sum_{i=0}^{t-j} \omega_i^{(j-1)} \frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}}, \qquad \text{con } \omega_i^{(j-1)} \geq 0,\ \sum_{i=0}^{t-j} \omega_i^{(j-1)} = 1.$$

In particolare, si può fissare $\hat{f}_{j-1} = max\{C_{ij}/C_{i,j-1} |\ i = 0, \ldots, t-j\}$. La riserva che si ottiene è detta riserva *worst case*.

- Nel corso della dimostrazione della Proposizione, si è ottenuta la relazione

$$C_{ij} = C_{it} \frac{1}{\prod_{h=j}^{t-1} f_h} = C_{it} \prod_{h=j}^{t-1} f_h^{-1} = C_{it} b_j$$

Notiamo che il fattore $b_j = \prod_{h=j}^{t-1} f_h^{-1}$, che dipende solo da j, può essere interpretato come la quota del costo ultimo pagata con differimento minore o uguale a j.

Si ha $b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_t = 1$, la sequenza di tali fattori è detta ***claims development pattern***.

- Le stime dei *link ratio* per differimenti elevati sono medie di pochi *link ratio* osservati, possono presentare elevata variabilità ed essere poco attendibili. Spesso, in pratica, tali stime sono sostituite con valori ottenuti perequando le stime grezze mediante funzioni regolari.

  Esempio. Siano $\hat{f}_h$, $h \geq k$, per un fissato k, le stime originali e sia

$$f(h) = ab^{h-k} \quad \left(\Leftrightarrow log f(h) = \alpha + \beta(h-k)\right),\ h = k, \dots, t-1,$$

  la funzione introdotta per perequare. I parametri a, b sono stimati dai dati grezzi con qualche criterio, ad esempio con il metodo dei minimi quadrati:

$$\min_{a,b} \sum_{h=k}^{t-1} \left(f(h) - \hat{f}_h\right)^2.$$

  Ottenute le stime $\hat{a}, \hat{b}$, si pone

$$\hat{f}_{k+1}^{(s)} = \hat{a}\hat{b},\ \hat{f}_{k+2}^{(s)} = \hat{a}\hat{b}^2,\ \dots,\ \hat{f}_{t-1}^{(s)} = \hat{a}\hat{b}^{t-1-k}\ .$$

- L'algoritmo del metodo della catena può essere utilizzato anche per altre grandezze di interesse, purché si possa accogliere l'ipotesi alla base del metodo:

$$\frac{Y_{ij}}{Y_{i,j-1}} \text{ dipende solo da } j, \text{non da } i, \text{per ogni } i, j.$$

Ad esempio, potrebbe essere applicato a $P_{ij}, N_{ij}, N_{ij}^{c}, I_{ij}$.

- Se si considerano gli *incurred claims* I_{ij} (valutazione del costo ultimo per l'anno di origine i, alla fine dell'anno $i+j$), essendo t il massimo differimento dall'origine, si ha $I_{it} = C_{it}$. Se si utilizza il metodo della catena sia per C_{ij} sia per I_{ij}, si ottengono, generalmente, stime sensibilmente diverse per i costi ultimi, $\hat{I}_{it} \neq \hat{C}_{it}$, e quindi per le riserve

$$\hat{I}_{it} - C_{i,t-i} \neq \hat{C}_{it} - C_{i,t-i}.$$

Notiamo che gli *incurred claims* sono dati rilevanti e può accadere che l'ipotesi base del metodo della catena sia accettabile più facilmente per tali grandezze, rispetto ai C_{ij}.

Sono proposti modelli stocastici che consentono di tenere conto di entrambe le informazioni, C_{ij} e I_{ij}, e valutare due riserve "più vicine" o un'unica stima della riserva.

- Il metodo CL è basato sull'ipotesi che lo sviluppo dei pagamenti sia stabile, al variare degli anni di origine. L'ipotesi può essere inadeguata se si verificano

  - situazioni che portano a modificare il processo di liquidazione dei sinistri,

  - variazioni del tipo di affari gestiti e della composizione del portafoglio,

  - inflazione nei costi dei sinistri.

Per l’ultimo problema, può essere sufficiente considerare come grandezza di interesse i pagamenti cumulati indicizzati C_{ij}^*, introducendo stime esterne dei tassi annui di inflazione.

Per $i + j \leq t$,

$$C_{ij} \;\; \rightarrow \;\; P_{ij} = C_{ij} - C_{ij-1} \;\; \rightarrow \;\; P_{ij}^* = P_{ij}\left(1 + \varphi_{i+j+1}\right) \ldots (1 + \varphi_t) \;\; \rightarrow \;\; C_{ij}^* = \sum_{h=0}^{j} P_{ih}^*.$$

Se è possibile supporre che $C_{ij}^*/C_{i,j-1}^*$ siano indipendenti da i, si può applicare il metodo della catena a tali grandezze ed ottenere

$$\hat{C}_{ij}^*, \;\; i + j > t,$$

stime dei pagamenti cumulati futuri espressi a valori correnti dell’anno t.

Per esprimere a valori correnti dell’anno di pagamento si devono introdurre stime dei tassi annui di inflazione futuri, $\varphi_{t+1}, \varphi_{t+2}, \ldots$. Per $i + j > t$,

$$\hat{C}_{ij}^* \;\; \rightarrow \;\; \hat{P}_{ij}^* = \hat{C}_{ij}^* - \hat{C}_{ij-1}^* \;\; \rightarrow \;\; \hat{P}_{ij} = \hat{P}_{ij}^*(1 + \varphi_{t+1}) \ldots \left(1 + \varphi_{i+j}\right) \;\; \rightarrow \;\; R_i = \sum_{j=t-i+1}^{t} \hat{P}_{ij}.$$

METODO DI SEPARAZIONE O DI TAYLOR

Le grandezze di interesse sono i pagamenti incrementali P_{ij}, $i, j = 0, \dots, t$.

Il modello

Si assume che esistano $\alpha_0, \dots, \alpha_t$ positivi, $r_0, \dots, r_t$ non negativi, uno almeno positivo, $\lambda_0, \dots, \lambda_t, \lambda_{t+1}, \dots, \lambda_{2t}$ positivi tali che

$$P_{ij} = \alpha_i r_j \lambda_{i+j}, \;\; i = 0, \dots, t, j = 0, \dots, t.$$

Pertanto, i pagamenti incrementali P_{ij} sono rappresentati mediante un **modello moltiplicativo** nel quale **il fattore α_i dipende solo dall'anno di origine**, **il fattore r_j dipende solo dal differimento**, **il fattore λ_{i+j} dipende dall'anno di pagamento**.

Notiamo che se λ_{i+j} fosse costante, $\lambda_{i+j} = \lambda$, per ogni i, j, si ritroverebbe il modello sottostante il metodo della catena, sarebbe dunque valida l'ipotesi di stabilità nel processo di smontamento della riserva, al variare degli anni di origine.

Nell’attuale modello, lo scostamento da tale ipotesi è dovuta ad effetti legati all’anno di pagamento. Nel processo di smontamento della riserva, si “separa” la componente che dipende solo dal differimento, r_j, che traduce la stabilità, dai disturbi che la accompagnano dovuti ad effetti, di carattere economico, finanziario ,…, legati all’anno di pagamento.

I dati sono i pagamenti incrementali $P_{ij}, i + j \leq t$, si suppone inoltre data, per ogni anno di origine, una grandezza ω_i che fornisca una misura di “esposizione”.

Ad esempio, $\omega_i = n_i$ il numero di sinistri (pagati + riservati) dell’anno di origine i oppure $\omega_i = CP(i)$ competenza premi dell’anno di origine i.

Nel modello, si pone $\alpha_i = \omega_i$. Trattiamo il caso in cui $\omega_i = n_i$ e dunque $\alpha_i = n_i$.

Un'interpretazione dei parametri. Consideriamo il modello

$$P_{ij} = n_i r_j \lambda_{i+j}, \quad i = 0, \dots, t, j = 0, \dots, t,$$

dove possiamo assumere $\sum_{j=0}^{t} r_j = 1$.

Supponiamo che per i sinistri in esame il risarcimento medio per sinistro, in termini reali, sia lo stesso indipendentemente dall'anno di origine. Indichiamo con μ tale importo, a valori correnti dell'anno di origine 0.

Interpretiamo λ_{i+j} come l'importo del risarcimento medio per sinistro a valori correnti dell'anno di calendario $i+j$,

$$\lambda_{i+j} = \mu \rho_{i+j},$$

dove ρ_{i+j} è il fattore di adeguamento dei costi dei sinistri dall'anno 0 all'anno $i+j$,

- $\rho_{i+j} = (1+\varphi_1) \dots \left(1+\varphi_{i+j}\right)$, se φ_k è il tasso annuo di inflazione tra gli anni $k-1$ e k,
- $\rho_{i+j} = \Phi(i+j)/\Phi(0)$, se $\Phi(k)$ è un indice dei costi dei sinistri tra 0 e k.

Allora, si ha

$$P_{ij} = n_i \mu \rho_{i+j} r_j,$$

dove

- $n_i \mu$ è il costo ultimo dell'anno di origine i a valori correnti dell'anno 0,
- $n_i \mu \rho_{i+j}$ è il costo ultimo dell'anno di origine i a valori correnti dell'anno $i + j$,
- r_j è la quota del costo $n_i \mu \rho_{i+j}$ pagata con differimento j, tale quota non dipende da i.

Stima dei parametri

Riprendiamo il modello $P_{ij} = n_i r_j \lambda_{i+j}$, $i = 0, \dots, t, j = 0, \dots, t$. Sulla base dei dati, si ricavano stime dei parametri $r_0, \dots, r_t$, $\lambda_0, \dots, \lambda_t$. Per la proiezione, si devono poi ottenere anche $\lambda_{t+1}, \dots, \lambda_{2t}$.

Poniamo $s_{ij} = \frac{P_{ij}}{n_i}$, $i = 0, \dots, t, i + j \leq t$. In termini dei parametri del modello, $\frac{P_{ij}}{n_i} = r_j \lambda_{i+j}$.

Obiettivo: stimare $r_0, \dots, r_t$, $\lambda_0, \dots, \lambda_t$ in modo da accostare i dati s_{ij}.

$$s_{ij} = \frac{P_{ij}}{n_i}$$

	0	1	…	$t-1$	t
0	s_{00}	s_{01}		$s_{o,t-1}$	s_{0t}
1	s_{10}	s_{11}		$s_{1,t-1}$	
…					
$t-1$	$s_{t-1,0}$	$s_{t-1,1}$			
t	s_{t0}				

$$\frac{P_{ij}}{n_i} = r_j \lambda_{i+j}$$

	0	1	…	$t-1$	t
0	$r_0\lambda_0$	$r_1\lambda_1$		$r_{t-1}\lambda_{t-1}$	$r_t\lambda_t$
1	$r_0\lambda_1$	$r_1\lambda_2$		$r_{t-1}\lambda_t$	
…					
$t-1$	$r_0\lambda_{t-1}$	$r_1\lambda_t$			
t	$r_0\lambda_t$				

Si nota che, nel triangolo di destra,

- gli elementi che si trovano in una stessa diagonale hanno lo stesso parametro legato all'anno di calendario,
- gli elementi che si trovano in una stessa colonna hanno lo stesso parametro legato all'anno di differimento.

Sfruttando tale osservazione e l'ipotesi $\sum_{j=0}^{t} r_j = 1$, la stima dei parametri è ottenute con il seguente procedimento iterativo.

Passo 1. Si sommano gli elementi dell'ultima diagonale in ciascun triangolo,

$\sum_{i+j=t} s_{ij}$ $\quad\quad$ $\sum_{j=0}^{t} r_j \lambda_t = \lambda_t \sum_{j=0}^{t} r_j = \lambda_t$, $\quad\quad$ si pone $\quad \hat{\lambda}_t = \sum_{i+j=t} s_{ij}$.

Nell'ultima colonna,

s_{0t} $\quad\quad$ $r_t \lambda_t$, $\quad\quad$ si pone $\quad \hat{r}_t = \frac{s_{0t}}{\hat{\lambda}_t}$.

Passo 2. Si sommano gli elementi della penultima diagonale in ciascun triangolo,

$\sum_{i+j=t-1} s_{ij}$ $\quad\quad$ $\sum_{j=0}^{t-1} r_j \lambda_{t-1} = \lambda_{t-1}(1 - r_t)$, $\quad\quad$ si pone $\quad \hat{\lambda}_{t-1} = \frac{\sum_{i+j=t-1} s_{ij}}{1-\hat{r}_t}$.

Si sommano gli elementi della penultima colonna,

$s_{0,t-1} + s_{1,t-1}$ $\quad\quad$ $r_{t-1}\lambda_{t-1} + r_{t-1}\lambda_t = r_{t-1}(\lambda_{t-1} + \lambda_t)$, si pone $\quad \hat{r}_{t-1} = \frac{s_{0,t-1}+s_{1,t-1}}{\hat{\lambda}_{t-1}+\hat{\lambda}_t}$.

Passo generico, stima di r_h, λ_h. Si sommano gli elementi della diagonale relativa all'anno di pagamento h in ciascun triangolo,

$\sum_{i+j=h} s_{ij}$ $\quad\quad$ $\sum_{j=0}^{h} r_j \lambda_h = \lambda_h(1 - \sum_{j=h+1}^{t} r_j)$, $\quad\quad$ si pone $\quad \hat{\lambda}_h = \frac{\sum_{i+j=h} s_{ij}}{1-\sum_{j=h+1}^{t} \hat{r}_j}$.

Si sommano gli elementi della colonna relativa al differimento h,

$\sum_{i=0}^{t-h} s_{ih}$ $\quad\quad$ $\sum_{i=0}^{t-h} r_h \lambda_{i+h} = r_h \sum_{k=h}^{t} \lambda_k$, $\quad\quad$ si pone $\quad \hat{r}_h = \frac{\sum_{i=0}^{t-h} s_{ih}}{\sum_{k=h}^{t} \hat{\lambda}_k}$.

Osservazione. Se si rappresentano gli elementi di ciascuno dei due triangoli in una tabella che riporti sulle righe gli anni di pagamento, le condizioni poste per la stima dei parametri sono rappresentate dal sistema

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{h} r_j \lambda_h = \sum_{i+j=h} s_{ij} & h = 0, \dots, t \\ \sum_{k=j}^{t} r_j \lambda_k = \sum_{i=0}^{t-j} s_{ij} & j = 0, \dots, t \end{cases}$$

nel quale si richiedono condizioni di “bilanciamento” sulle righe e sulle colonne (sui ricordi il metodo dei totali marginali nella tariffazione).

Come si è detto, per la proiezione, si devono ottenere anche $\lambda_{t+1}, \dots, \lambda_{2t}$.

Nelle ipotesi del modello interpretativo, il rapporto

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} = \frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} = (1 + \varphi_k)$$

è il coefficiente di adeguamento dei costi dei sinistri tra $k-1$ e k.

Allora per ottenere i parametri relativi ad anni futuri, si può ricorrere a stime esterne dei tassi annui di inflazione futuri oppure utilizzare qualche metodo di estrapolazione a partire dalle stime

$$\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_0}, \frac{\hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_1}, \dots, \frac{\hat{\lambda}_t}{\hat{\lambda}_{t-1}}.$$

Le previsioni dei pagamenti incrementali del triangolo inferiore, sono ottenuti dal modello, sostituendo i parametri con le loro stime

$$\hat{P}_{ij} = n_i \hat{r}_j \hat{\lambda}_{i+j}, \quad i = 1, \dots, t, i + j > t,$$

Le riserve sono

$$R_i = \sum_{j=t-i+1}^{t} \hat{P}_{ij}, \quad i = 1, \dots, t.$$

Osservazione

Notiamo che rispetto al metodo della catena modificato per tenere conto dell'inflazione, nel metodo di Taylor i tassi annui di inflazione dei costi dei sinistri, relativi al passato, sono stimati dai dati del triangolo di *run-off* e dunque dai dati ai quali si riferiscono, non sono stime esterne.

Spesso il metodo di separazione è applicato per stimare i coefficienti annui di adeguamento dei costi dei sinistri,

$$\frac{\hat{\lambda}_k}{\hat{\lambda}_{k-1}} = (1 + \varphi_k), \quad k = 1, \dots, t,$$

da utilizzare in altri metodi che operano sui pagamenti indicizzati P_{ij}^* o C_{ij}^*.

E' problematica la stima dei $\lambda_{t+1}, \dots, \lambda_{2t}$.

METODO DEL LOSS RATIO (SEMPLICE)

E' detto ***ultimate loss ratio*** per l'anno di origine i, il rapporto,

$$L_i = \frac{C_{it}}{CP(i)},$$

tra il costo ultimo e la competenza premi dell'anno i.

Ricordiamo che i premi di competenza possono essere interpretati come i premi destinati a coprire i sinistri di un esercizio.

Le grandezze di interesse del metodo sono i pagamenti cumulati C_{ij}, $i, j = 0, \dots, t$.

I dati sono i pagamenti cumulati $C_{ij}, i + j \leq t$, e i premi di competenza per ogni anno di origine, $CP(i)$. Si suppone inoltre di disporre di stime esterne del *ultimate loss ratio*, $l_i, i = 0, \dots, t$.

Per l'anno di origine i, si stima L_i mediante l_i, il costo ultimo mediante la

$$\hat{C}_{it} = l_i CP(i),$$

e la riserva con

$$R_i = \hat{C}_{it} - C_{i,t-i}.$$

Osservazioni

Notiamo che non si sfruttano le informazioni sul processo di smontamento della riserva portate dai dati, si tiene conto solo del pagamento cumulato $C_{i,t-i}$ fino all'anno di valutazione.

Il metodo può essere utilizzato per settori d'affari per i quali non si hanno dati adeguati, ad esempio per nuovi prodotti. Si considerano allora *ultimate loss ratio* da dati di mercato o dal piano d'affari del nuovo prodotto.

Il prossimo metodo è una modifica del metodo del *loss ratio*, che tiene conto dello sviluppo dei pagamenti nel portafoglio.

METODO DI BORNHEUTTER-FERGUSON (BF)

Le grandezze di interesse sono i pagamenti cumulati C_{ij}, $i, j = 0, \dots, t$.

Il modello

Si assume che $C_{ij} > 0$, $C_{ij} \geq C_{i,j-1}$, $i, j = 0, \dots, t$.

Si suppone che esistano $\mu_0, \dots, \mu_t$ e $b_0, \dots, b_t$, numeri positivi, con $b_t = 1$, tali che

$$C_{ij} = \mu_i b_j, \quad i, j = 0, \dots, t.$$

Si ha un **modello moltiplicativo** per i pagamenti cumulati nel quale **un fattore dipende solo dall'anno di origine**, μ_i, **l'altro dipende solo dal differimento**, b_j.

Interpretazione dei parametri. I parametri possono essere interpretati come

- μ_i costo ultimo per l'anno di origine i, $\mu_i = C_{it}$,
- b_j la quota del costo ultimo pagata con differimento minore uguale a j, indipendente da i.

Dalla $C_{ij} \geq C_{i,j-1}$, segue $b_j \geq b_{j-1}$.

Il modello è equivalente al modello sottostante il metodo CL. Infatti,

BF $C_{ij} = \mu_i b_j \;\Rightarrow\; \frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} = \frac{b_j}{b_{j-1}} \triangleq f_{j-1}$ CL

CL $\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} = f_{j-1} \;\Rightarrow\; C_{ij} = C_{it}\frac{1}{\prod_{h=j}^{t-1} f_h} = C_{it}\prod_{h=j}^{t-1} f_h^{-1} \triangleq \mu_i b_j$ BF

E' diverso nei due metodi l'approccio di stima dei parametri.

Notiamo che i pagamenti in sospeso per l'anno di origine i possono essere rappresentati da

$$C_{it} - C_{i,t-i} = \mu_i - \mu_i b_{t-i} = \mu_i(1 - b_{t-i}),$$

dove $1 - b_{t-i}$ è la quota del costo ultimo ancora da pagare dopo t, detta ***still-to-come factor***.

Il costo ultimo può essere rappresentato da

$$C_{it} = C_{i,t-i} + \mu_i(1 - b_{t-i}).$$

Se $\hat{\mu}_i$, $i = 0, \dots, t$, $\hat{b}_j$, $j = 0, \dots, t$, sono stime dei parametri, la stima del costo ultimo per l'anno di origine i è

$$\hat{C}_{it} = C_{i,t-i} + \hat{\mu}_i(1 - \hat{b}_{t-i}),$$

la stima della riserva è

$$R_i = \hat{\mu}_i(1 - \hat{b}_{t-i}).$$

Stima dei parametri

Nella pratica attuariale, tipicamente,

- le stime dei μ_i, $i = 0, \dots, t$, sono basate su dati esterni: di mercato, da altri portafogli, dal piano d'affari del prodotto. I dati esterni possono essere costi ultimi oppure *ultimate loss ratio* l_i dai quali si ottengono stime dei costi ultimi come visto nel modello del *loss ratio* semplice: $\hat{\mu}_i = l_i CP(i)$, con $CP(i)$ competenza premi del portafoglio,

- le stime dei b_j, $j = 0, \dots, t$, sono ottenute dai *link ratio* stimati dai dati di portafoglio $C_{ij}, i + j \leq t$, con il metodo CL. Come sopra ricordato, nel CL si ha $C_{ij} = C_{it} \prod_{h=j}^{t-1} f_h^{-1} = C_{it} b_j$, si pone allora $\hat{b}_j = \hat{b}_j^{CL} = \prod_{h=j}^{t-1} \hat{f}_h^{-1}$.

Per l’anno di origine i, la stima del costo ultimo è ottenuta da

$$\hat{C}_{it} = C_{i,t-i} + \hat{\mu}_i(1 - \hat{b}^{CL}_{t-i}),$$

pagamento effettuato fino a t — stima iniziale — peso assegnato alla stima iniziale

dati di portafoglio — *esterna* — *dati di portafoglio*

la stima iniziale $\hat{\mu}_i$, ottenuta da dati esterni, è “aggiustata” tenendo conto dei dati del triangolo di *run-off*.

La stima della riserva è

$$R_i = \hat{\mu}_i(1 - \hat{b}^{CL}_{t-i}).$$

Si è detto che $b_j \geq b_{j-1}$. La relazione sussiste anche per le stime: $\hat{b}_j^{CL} \geq \hat{b}_{j-1}^{CL}$. Infatti, per ogni h, $\hat{f}_h \geq 1 \;\Rightarrow\; \prod_{h=j}^{t-1} \hat{f}_h \leq \prod_{h=j-1}^{t-1} \hat{f}_h \;\;\Rightarrow\;\; \left(\prod_{h=j}^{t-1} \hat{f}_h\right)^{-1} \geq \left(\prod_{h=j-1}^{t-1} \hat{f}_h\right)^{-1}$.

Allora, $(1 - \hat{b}_{t-i}^{CL})$ è crescente al crescere di i: se $i_1 < i_2$, $(1 - \hat{b}_{t-i_1}^{CL}) \leq (1 - \hat{b}_{t-i_2}^{CL})$.

Nelle

$$\hat{C}_{it} = C_{i,t-i} + \hat{\mu}_i(1 - \hat{b}_{t-i}^{CL}), \qquad\qquad R_i = \hat{\mu}_i(1 - \hat{b}_{t-i}^{CL}),$$

il peso assegnato alla stima esterna del costo ultimo è tanto più piccolo quanto più l'anno di origine è lontano dall'anno di valutazione: maggiore è la disponibilità di dati interni, minore peso si assegna alla stima esterna.

0							
…							
i_1	*	*	*	*	*		
…							
i_2	*	*	*				
…							
t							

Confronto tra le stime CL e BF

Per il costo ultimo dell'anno di origine i si ha

$$\hat{C}_{it}^{BF} = C_{i,t-i} + \hat{\mu}_i(1 - \hat{b}_{t-i}^{CL}), \qquad \hat{C}_{it}^{CL} = C_{i,t-i} \prod_{h=t-i}^{t-1} \hat{f}_h$$

Essendo $\hat{b}_{t-i}^{CL} = \left(\prod_{h=t-i}^{t-1} \hat{f}_h\right)^{-1}$, si ha

$$\hat{C}_{it}^{BF} = C_{i,t-i}\left(\prod_{h=t-i}^{t-1} \hat{f}_h\right)\hat{b}_{t-i}^{CL} + \hat{\mu}_i(1 - \hat{b}_{t-i}^{CL})$$

$$= \hat{C}_{it}^{CL}\, \hat{b}_{t-i}^{CL} + \hat{\mu}_i(1 - \hat{b}_{t-i}^{CL})$$

La stima del costo ultimo BF è una media ponderata, con pesi $\hat{b}_{t-i}^{CL}$, $(1 - \hat{b}_{t-i}^{CL})$, delle stime dei costi ultimi

- $\hat{C}_{it}^{CL}$ basata solo sui dati del triangolo di *run-off*,
- $\hat{\mu}_i$ basata solo su dati esterni.

Il peso assegnato alla stima CL è tanto maggiore quanto più lontano è l'anno di origine ovvero quanti più dati si hanno. Si noti che si ottiene una formula tipo credibilità.

Osservazioni.

- Nel metodo CL, si ha

$$R_i^{CL} = C_{i,t-i}\left(\prod_{h=t-i}^{t-1} \hat{f}_h - 1\right).$$

La stima risente in modo marcato da $C_{i,t-i}$: se $C_{i,t-i}$ è “grande”, la riserva è “grande”, se $C_{i,t-i}$ è ”piccolo”, la riserva è “piccola”.

In alcuni settori (es. RC Medica, RCA per lesioni fisiche, riassicurazione), nei primi anni di differimento, l’importo pagato può essere basso, mentre una maggiore entità di pagamenti avviene con differimenti più elevati. Applicando il metodo CL a tali tipi di dati, per gli anni di origine più recenti, si possono ottenere riserve molto basse, mentre le riserve dovrebbero essere elevate perché elevato è l’importo ancora da risarcire. Questa è una delle motivazioni che hanno portato ad introdurre il metodo BF. In realtà, il problema è piuttosto legato al fatto che il metodo CL viene applicato anche a situazioni nelle quali l’ipotesi alla base non è soddisfatta.

- E’ mossa una critica all’uso del metodo CL per la stima dei parametri b_j. Sono proposti altri metodi di stima.

CREDIBLE CLAIM RESERVING METHODS

I metodi CL e BF sono spesso utilizzati in pratica.

Mentre il metodo CL si basa solo sui dati del triangolo di *run-off*, il metodo BF tiene conto anche di stime esterne dei costi ultimi.

Sono detti **credible claim reserving methods** metodi che utilizzano, per ogni anno di origine, misture delle riserve CL e BF. Si pone

$$\hat{C}_{it} = \hat{C}_{it}^{CL}\alpha_i + \hat{C}_{it}^{BF}(1-\alpha_i),\;\; 0 \le \alpha_i \le 1,$$

e dunque

$$R_i = \hat{C}_{it} - C_{i,t-i} = R_i^{CL}\alpha_i + R_i^{BF}(1-\alpha_i).$$

I metodi differiscono per la scelta dei pesi. In particolare, nel metodo di **Benktander–Hovinen** i pesi sono $\alpha_i = \hat{b}_{t-i}^{CL}$. In tale caso, la “credibilità” della stima CL aumenta con l’aumentare dei dati disponibili.

METODO DI FISHER-LANGE (o del costo medio per sinistro)

Una variante del metodo che descriviamo è stata utilizzata nella tariffazione RCA in regime di tariffa amministrata.

I **numeri di sinistri chiusi** nei diversi anni di differimento hanno una influenza sull'entità dell'importo di pagamento. Il metodo tiene conto anche di questo aspetto e consente di ottenere stime degli importi da pagare in futuro e anche stime dei numeri di sinistri che saranno chiusi in futuro.

Le grandezze di interesse sono i pagamenti incrementali indicizzati P_{ij}^* e i numeri $n_{ij} =$ numero di sinistri dell'anno di origine i, chiusi (*finalized*) con differimento j, $i, j = 0, \dots, t$.

Il modello

Si suppone che esistano $\sigma_0^*, \dots, \sigma_t^*$, numeri positivi, tali che

$$P_{ij}^* = n_{ij}\sigma_j^*, \quad i, j = 0, \dots, t,$$

un **modello moltiplicativo** per i pagamenti incrementali indicizzati P_{ij}^* nel quale **un fattore è il numero di sinistri dell'anno di origine i chiusi con differimento j, l'altro è un parametro che dipende solo dal differimento**, σ_j^*.

Interpretazione dei parametri. Dall'ipotesi, segue che

$$\sigma_j^* = \frac{P_{ij}^*}{n_{ij}},$$

σ_j^* è la quota di P_{ij}^* mediamente attribuibile a ciascun sinistro di origine i, chiuso con differimento j. Si assume che tale quota dipenda solo dal differimento; σ_j^* può dunque essere interpretato come il pagamento medio per sinistro chiuso con differimento j, aggiustato per l'inflazione nei costi dei sinistri.

Si noti che l'ipotesi che il pagamento medio per un sinistro che viene chiuso con differimento j non dipenda dall'anno di origine è molto forte, qui è mitigata dal fatto che si tiene conto di effetti inflazionistici.

Osserviamo che nel rapporto a secondo membro non c'è perfetta corrispondenza tra numeratore e denominatore, nel senso che, per i sinistri origine i, a denominatore c'è il numero di sinistri chiusi con differimento j, mentre a numeratore non si tiene conto di eventuali pagamenti effettuati in precedenza per tali sinistri e si tiene conto di eventuali pagamenti parziali per sinistri che saranno chiusi con differimento maggiore.

I dati disponibili sono i triangoli di *run-off* dei pagamenti P_{ij}^* e dei numeri di sinistri chiusi n_{ij}, $i+j \leq t$, ed inoltre il numero n_i di sinistri dell'anno di origine i, $i = 0, \dots, t$.

Notiamo che, se è dato il triangolo di *run-off* dei pagamenti incrementali P_{ij}, per ottenere i P_{ij}^* si devono usare stime dei tassi annui di inflazione o dei coefficienti annui di adeguamento dei costi dei sinistri per calcolare $P_{ij}^* = P_{ij}\left(1+\varphi_{i+j+1}\right) \dots (1+\varphi_t)$. Per stimare tali coefficienti dai dati, si può utilizzare preventivamente il metodo di separazione ed ottenere

$$\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_0} = 1+\varphi_1, \dots, \frac{\hat{\lambda}_t}{\hat{\lambda}_{t-1}} = 1+\varphi_t.$$

Stima dei parametri σ_j^*

Dall'ipotesi del modello, segue

$$\sum_{i \in I} P_{ij}^* = \sigma_j^* \sum_{i \in I} n_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_j^* = \frac{\sum_{i \in I} P_{ij}^*}{\sum_{i \in I} n_{ij}}, \text{ per ogni } I \subset \{0, \dots, t\}.$$

Per stimare σ_j^* si considera come insieme I il più grande insieme di anni di origine per il quale si dispone dei dati

$$\hat{\sigma}_j^* = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} P_{ij}^*}{\sum_{i=0}^{t-j} n_{ij}}.$$

Per l’attuale modello, ai fini della proiezione, si deve introdurre anche un modello per i numeri dei sinistri chiusi.

Modello (1) per n_{ij}

Si assume che

$$n_{ij} = n_i \phi_j, \quad i, j = 0, \ldots, t,$$

un **modello moltiplicativo** per i numeri di sinistri chiusi nel quale **un fattore è il numero di sinistri dell’anno di origine i, l’altro è un parametro che dipende solo dal differimento**, ϕ_j.

Il parametro ϕ_j è interpretabile come la quota dei sinistri che vengono chiusi con differimento j, indipendentemente dall’anno di origine: si ha una stabilità nel numero delle chiusure, al variare degli anni di origine.

La sequenza

$$\frac{n_{i0}}{n_i}, \ldots, \frac{n_{it}}{n_i},$$

fornisce le *speed of finalization* con i diversi differimenti.

Per la **stima dei parametri** ϕ_j, osservato che si ha $\sum_{i\in I} n_{ij} = \phi_j \sum_{i\in I} n_i$, per ogni $I \subset \{0, \dots, t\}$, si pone

$$\hat{\phi}_j = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} n_{ij}}{\sum_{i=0}^{t-j} n_i}.$$

Le stime dei numeri di chiusure del triangolo inferiore si ottengono, al solito, sostituendo ai parametri le stime

$$\hat{n}_{ij} = n_i \hat{\phi}_j, \;\; i + j > t.$$

Il modello presenta un problema, si può infatti verificare che riesce $\sum_{j=0}^{t-i} n_{ij} + \sum_{j=t-i+1}^{t} \hat{n}_{ij} > n_i$.

Notiamo che, dall'ipotesi del modello segue

$$\frac{n_{ij}}{n_{i,j-1}} = \frac{\phi_j}{\phi_{j-1}} \triangleq f_{j-1}.$$

E' dunque soddisfatta l'ipotesi alla base dell'algoritmo del metodo CL. Per la stima dei *link ratio* f_{j-1} e per la proiezione si può allora usare l'algoritmo CL. In questo caso, non è necessario avere i dati sui numeri di sinistri n_i, $i = 0, \dots, t$.

Dall'ipotesi del Modello (1), segue che, fissati i, j,

$$\sum_{k=j}^{t} n_{ik} = n_i \sum_{k=j}^{t} \phi_k.$$

$$\uparrow$$

numero dei sinistri di origine i chiusi con differimento $\geq j$

Dalla precedente relazione e dalla $n_{ij} = n_i \phi_j$, segue

$$\frac{n_{ij}}{\sum_{k=j}^{t} n_{ik}} = \frac{\phi_j}{\sum_{k=j}^{t} \phi_k} \triangleq \psi_j$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n_{ij} = \psi_j \sum_{k=j}^{t} n_{ik}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n_{ij} = \psi_j \left(n_i - \sum_{k=0}^{j-1} n_{ik}\right)$$

Modello (2) per $\boldsymbol{n_{ij}}$

Si assume che

$$n_{ij} = \psi_j\left(n_i - \sum_{k=0}^{j-1} n_{ik}\right), \quad i, j = 0, \dots, t,$$

un **modello moltiplicativo** per i numeri di sinistri chiusi nel quale **un fattore è il numero di sinistri dell'anno di origine $\boldsymbol{i}$ chiusi con differimento $\geq \boldsymbol{j}$, l'altro è un parametro che dipende solo dal differimento**, ψ_j.

Il parametro ψ_j è interpretabile come la quota dei sinistri, chiusi con differimento $\geq j$, che vengono chiusi con differimento j, indipendentemente dall'anno di origine.

Il Modello (1) implica il Modello (2), non vale il viceversa.

Per la **stima dei parametri** ψ_j, osservato che si ha $\sum_{i\in I} n_{ij} = \psi_j \sum_{i\in I}\left(n_i - \sum_{k=0}^{j-1} n_{ik}\right)$, per ogni $I \subset \{0, \dots, t\}$, si pone

$$\widehat{\psi}_j = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} n_{ij}}{\sum_{i=0}^{t-j}\left(n_i - \sum_{k=0}^{j-1} n_{ik}\right)}.$$

Le stime dei numeri di chiusure del triangolo inferiore, dall'ipotesi del modello, sono ottenute con il seguente procedimento ricorsivo:

$$\begin{aligned}
&\hat{n}_{i,t-i+1} = \hat{\psi}_{t-i+1}\left(n_i - \sum_{k=0}^{t-i} n_{ik}\right),\\
&\hat{n}_{i,t-i+2} = \hat{\psi}_{t-i+2}\left(n_i - \sum_{k=0}^{t-i} n_{ik} - \hat{n}_{i,t-i+1}\right),\\
&\dots\\
&\hat{n}_{i,j} = \hat{\psi}_j\left(n_i - \sum_{k=0}^{t-i} n_{ik} - \sum_{k=t-i+1}^{j-1} \hat{n}_{i,k}\right),\ i+j>t.
\end{aligned}$$

Si può verificare che riesce $\sum_{j=0}^{t-i} n_{ij} + \sum_{j=t-i+1}^{t} \hat{n}_{ij} = n_i$.

Per la proiezione dei pagamenti incrementali del triangolo inferiore, si pone

$$\hat{P}_{ij}^* = \hat{n}_{ij}\hat{\sigma}_j^*,\ i+j>t.$$

Per ottenere le stime dei pagamenti a valori correnti dell'anno di pagamento si devono introdurre stime esterne dei tassi annui di inflazione futuri, $\varphi_{t+1}, \varphi_{t+2}, \dots$. Per $i+j>t$,

$$\hat{P}_{ij} = \hat{P}_{ij}^*(1+\varphi_{t+1}) \dots \left(1+\varphi_{i+j}\right).$$

Le riserve sono

$$R_i = \sum_{j=t-i+1}^{t} \hat{P}_{ij},\ \ i = 1, \dots, t.$$

RISERVE PER SINISTRI IBNR

I **sinistri IBNR** o **tardivi**, ad una fissata epoca, ad esempio alla chiusura di un esercizio, sono sinistri già avvenuti, ma non ancora denunciati

accadimento denuncia

____↓___________↓___________↓______

t_1 chiusura esercizio t_2

Alcune motivazioni per denunce tardive

- sinistri avvenuti in prossimità della chiusura dell'esercizio, può trattarsi di relativamente pochi sinistri di piccola entità, ma anche di un numero elevato di sinistri in caso di una calamità naturale,
- alcuni sinistri RCA che rientrano nella procedura di risarcimento diretto,
- mancata conoscenza del sinistro da parte dell'assicurato, ad esempio un furto o altro danno in una seconda casa,
- sinistri che provocano danni che si manifestano dopo diverso tempo, ad esempio malattie conseguenti all'esposizione alle polveri di amianto,
- sinistri che colpiscono un rischio assunto mediante coassicurazione (delega altrui).

Generalmente, nel lavoro diretto il fenomeno non è particolarmente rilevante.

Ad esempio, dai dati RCA si è visto che, mediamente, circa il 96% dei sinistri di un anno sono denunciati entro l'anno, la percentuale di IBNR è 4%. Di questi, la gran parte è denunciata entro i primi mesi dell'anno successivo. Inoltre, il costo medio di un sinistro IBNR è sensibilmente inferiore rispetto al costo medio di un sinistro denunciato.

Il fenomeno può essere più rilevante per i riassicuratori, in particolare per coperture XL.

METODI DETERMINISTICI PER LA VALUTAZIONE DELLA RISERVA PER SINISTRI IBNR

Metodo del costo medio e numero medio di sinistri IBNR

E' un metodo utilizzato quando il fenomeno IBNR non è particolarmente rilevate e quando il differimento della denuncia rispetto all'accadimento è breve.

Per semplicità, consideriamo un ramo nel quale i sinistri accaduti in un esercizio siano denunciati entro l'anno successivo. Allora, alla chiusura dell'esercizio θ, sono eventualmente non denunciati solo sinistri avvenuti nell'anno θ.

Consideriamo le seguenti ipotesi

- la quota di sinistri IBNR, rispetto ai sinistri avvenuti in un esercizio, sia costante al variare dell'anno di accadimento

$$\frac{n_{IBNR}(i)}{n(i)} = p,$$

- il costo medio per un sinistro IBNR, in termini reali, sia costante al variare dell'anno di accadimento

$$c^*_{IBNR}(i) = c^*.$$

Disponendo dei dati per gli anni di accadimento $i = \theta - T, \dots, \theta - 1$, si

- stima p, $\hat{p} = \sum_{i=\theta-T}^{\theta-1} \omega_i \frac{n_{IBNR}(i)}{n(i)}$, media ponderata con pesi ω_i,
- stima c^*, $\hat{c}^* = \sum_{i=\theta-T}^{\theta-1} \omega_i' c_{IBNR}^*(i)$, media ponderata con pesi ω_i'.

Dall'ipotesi sui numeri di sinistri, si ha

$$n_{IBNR}(\theta) = n(\theta)p.$$

Indicato con $n_D(\theta)$ il numero dei sinistri dell'anno θ denunciati nell'anno (dato), si ha

$$n(\theta) = n_D(\theta) + n_{IBNR}(\theta) = n_D(\theta) + n(\theta)p \quad \Rightarrow \quad n(\theta) = \frac{n_D(\theta)}{1-p}.$$

Si pone

$$\hat{n}_{IBNR}(\theta) = n_D(\theta)\frac{\hat{p}}{1-\hat{p}}.$$

La riserva per sinistri IBNR alla chiusura dell'esercizio θ è posta

$$R_{IBNR}(\theta) = \hat{n}_{IBNR}(\theta)\hat{c}_{IBNR}(\theta),$$

con $\hat{c}_{IBNR}(\theta)$ ottenuto da $\hat{c}^*$ tenendo conto di fattori inflazionistici.

Metodi basati su una misura di esposizione

Si considera una grandezza che fornisca una "misura dell'esposizione", nel senso che si ritiene che l'entità dei sinistri IBNR di un esercizio sia commisurata a tale grandezza.

La misura di esposizione può essere legata ai premi o ai sinistri, può essere di valore monetario o no. Ad esempio,

- premi di competenza o premi contabilizzati,
- numero di polizze stipulate,
- risarcimenti pagati o importo riservato per sinistri denunciati o *incurred claims*,
- numero di sinistri denunciati.

Indichiamo con

- $M(i)$ la misura di esposizione per l'anno di accadimento i,
- I_{ij}^{IBNR} la valutazione del costo ultimo per i sinistri accaduti nell'anno i, denunciati con differimento j, alla fine dell'anno di valutazione.

Rami con breve durata del differimento della denuncia

Consideriamo un ramo nel quale i sinistri accaduti in un esercizio siano denunciati entro l'anno successivo. Allora, alla chiusura dell'esercizio θ, sono eventualmente non denunciati solo sinistri avvenuti nell'anno θ.

Si assume che la quota del costo dei sinistri tardivi dell'anno i, rispetto a $M(i)$, sia costante al variare di i,

$$\frac{I_{i1}^{IBNR}}{M(i)} = p.$$

Per stimare p, si considera

$\hat{p} = \sum_{i=\theta-T}^{\theta-1} \omega_i \frac{I_{i1}^{IBNR}}{M(i)}$, media ponderata con pesi ω_i.

La riserva per sinistri IBNR alla chiusura dell'esercizio θ, stima di $I_{\theta 1}^{IBNR}$, è posta

$$R_{IBNR}(\theta) = M(\theta)\hat{p}.$$

Esempio. Metodo di Tarbell

Si pone

$$R_{IBNR}(\theta) = I_{\theta-1,1}^{IBNR} \, \frac{n_{10,11,12}^{(\theta)}}{n_{10,11,12}^{(\theta-1)}} \, \frac{c_{10,11,12}^{(\theta)}}{c_{10,11,12}^{(\theta-1)}},$$

dove, per $i = \theta - 1, \theta$,

- $n_{10,11,12}^{(i)}$, numero di sinistri denunciati negli ultimi tre mesi dell'anno i,
- $c_{10,11,12}^{(i)}$, stima del costo medio per sinistro, per i sinistri denunciati negli ultimi tre mesi dell'anno i.

Può essere visto come un caso particolare dell'approccio descritto sopra, nel quale

- $M(i) = n_{10,11,12}^{(i)} c_{10,11,12}^{(i)}$ stima del costo dei sinistri denunciati negli ultimi tre mesi dell'anno i,
- $\hat{p} = \frac{I_{\theta-1,1}^{IBNR}}{M(\theta-1)}$.

Rami con lunga durata del differimento della denuncia

Consideriamo un ramo nel quale i sinistri accaduti in un esercizio siano denunciati entro d anni.

Allora, alla chiusura dell'anno θ, ci possono essere sinistri IBNR con anno di accadimento $\theta - d + 1, \dots, \theta - 1, \theta$, mentre i sinistri con anno di origine $\leq \theta - d$ sono stati tutti denunciati.

Per svincolarsi dal particolare anno di calendario θ, è conveniente codificare gli anni di origine ponendo $i = 0, \dots, d$, con

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \theta - d & & \theta - d + 1 & & & & & & \theta & \\ \downarrow & \underline{\hspace{2cm}} & \downarrow & \underline{\hspace{2cm}} & \downarrow & \underline{\hspace{2cm}} & \downarrow & \underline{\hspace{6cm}} & \downarrow & \underline{\hspace{2cm}} & \downarrow \\ & 0 & & 1 & & 2 & & & & d & \end{array}$$

Alla fine dell'anno d, è possibile valutare I_{ij}^{IBNR} il costo ultimo per i sinistri accaduti nell'anno i, denunciati con differimento $j = 1, \dots, d$, per $i + j \leq d$. Tali valori sono considerati come dati.

Si assume data una misura di esposizione per i diversi anni di accadimento, ad esempio, $M(i) = CP(i)$, i premi di competenza dell'anno i.

		Anno di differimento						
Anno di acc.		1	…	j	…	$d-i$	…	d
0	$CP(0)$	I_{01}^{IBNR}	…	I_{0j}^{IBNR}	…	$I_{0,d-i}^{IBNR}$	…	I_{0d}^{IBNR}
…		…		…		…		
i	$CP(i)$	I_{i1}^{IBNR}	…	I_{ij}^{IBNR}	…	$I_{i,d-i}^{IBNR}$		
...		…						
…		…						
$d-1$	$CP(d-1)$	$I_{d-1,1}^{IBNR}$						
d	$CP(d)$							

Si formula l'ipotesi

$$\frac{I_{ij}^{IBNR}}{CP(i)} = r_j \Leftrightarrow I_{ij}^{IBNR} = CP(i)r_j\,, \qquad i = 0, \dots, d, j = 1, \dots, d,$$

ovvero che la quota dei premi di competenza assorbiti dal costo dei sinistri che vengono denunciati con differimento j sia costante al variare dell'anno di origine.

Per la stima del parametro r_j si considera una media ponderata

$$\hat{r}_j = \sum_{i=0}^{d-j} \omega_i^{(j)} \frac{I_{ij}^{IBNR}}{CP(i)}.$$

Per la proiezione,

$$\hat{I}_{ij}^{IBNR} = CP(i)\hat{r}_j, \quad i + j > d.$$

La riserva IBNR per l'anno di accadimento i,

$$R_{IBNR}(i) = \sum_{j=d-i+1}^{d} \hat{I}_{ij}^{IBNR} = CP(i) \sum_{j=d-i+1}^{d} \hat{r}_j.$$

Alcuni riferimenti

G.C. Taylor (1986), *Claims reserving in non-life insurance*, North Holland

G.C. Taylor (2000), *Loss reserving. An actuarial perspective*, Kluwer

M. Wüthrich, M. Merz (2008), *Stochastic claims reserving methods in insurance*, Wiley

Claims reserving manual (1989, Rivisto 1997), Institute of Actuaries