Generatori per l'immagine

Prop. $V = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \operatorname{im} f = \operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$.

Dim. $f(v_1), \dots, f(v_n) \in \operatorname{im} f \Rightarrow \operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_n)) \subset \operatorname{im} f$.

$\forall\, w \in \operatorname{im} f$, $\exists\ v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V$ t.c.

$$w = f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) \in \operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$$

$\Rightarrow \operatorname{im} f \subset \operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ e quindi si ha la tesi. $\square$

Cor. *Per ogni matrice* $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ *si ha* $\operatorname{im} L_A = \operatorname{span}\big(A_{(1)}, \dots, A_{(n)}\big)$.

Dim. $L_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $L_A(X) = AX$. $(e_1, \dots, e_n)$ base canonica di $\mathbb{K}^n \Rightarrow$

$$\operatorname{im} L_A = \operatorname{span}(L_A(e_1), \dots, L_A(e_n)).$$

$$L_A(e_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A_{(1)}$$

$$\vdots$$

$$L_A(e_n) = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A_{(n)}$$ $\square$

Cor. $\operatorname{rg} L_A = \operatorname{rg} A$.

Dim. $\operatorname{rg} L_A = \dim(\operatorname{im} L_A) = \dim\big(\operatorname{span}\big(A_{(1)}, \dots, A_{(n)}\big)\big) = \operatorname{rg} A$. $\square$

Cor. $L_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *suriettiva* $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = m$.

Isomorfismi di spazi vettoriali

Consideriamo $\mathbb{K}$-spazi vettoriali V e W.

Def. $f : V \to W$ *biiettiva* (o *biunivoca*) $\overset{\text{def}}{\iff}$ f iniettiva e suriettiva.

Oss. $f : V \to W$ biiettiva $\Leftrightarrow \forall\, w \in W$, $\exists!\, v \in V$ t.c. $f(v) = w$
$\Leftrightarrow \exists\, f^{-1} : W \to V$ *applicazione inversa:* $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W$.

Oss. $f^{-1}(f(v)) = (f^{-1} \circ f)(v) = \mathrm{id}_V(v) = v$ e similmente $f(f^{-1}(w)) = w$.

Def. $f : V \to W$ *isomorfismo* $\overset{\text{def}}{\iff}$ f lineare e biiettiva.

Oss. $\mathrm{id}_V : V \to V$ isomorfismo.

Prop. *$f : V \to W$ isomorfismo $\Rightarrow$ $f^{-1} : W \to V$ lineare.*

Dim. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall\, w_1, w_2 \in W \rightsquigarrow v_1 := f^{-1}(w_1)$, $v_2 := f^{-1}(w_2) \Rightarrow$ $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha w_1 + \beta w_2) &= f^{-1}(\alpha f(v_1) + \beta f(v_2)) \\ &= f^{-1}(f(\alpha v_1 + \beta v_2)) \qquad (f \text{ lineare}) \\ &= \alpha v_1 + \beta v_2 \\ &= \alpha f^{-1}(w_1) + \beta f^{-1}(w_2). \end{aligned}$$ □

Def. V e W sono *isomorfi* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists\, f : V \to W$ isomorfismo.
In questo caso scriviamo $V \cong W$ (si legge V isomorfo a W).

Consideriamo $\mathbb{K}$-spazi vettoriali U, V, W.

Prop. *$f : U \to V$ e $g : V \to W$ lineari $\Rightarrow$ $g \circ f : U \to W$ lineare.*

Dim. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall\, u_1, u_2 \in U \Rightarrow (g \circ f)(\alpha u_1 + \beta u_2) = g(f(\alpha u_1 + \beta u_2)) =$
$g(\alpha f(u_1) + \beta f(u_2)) = \alpha g(f(u_1)) + \beta g(f(u_2)) =$
$\alpha (g \circ f)(u_1) + \beta (g \circ f)(u_2)$. □

Oss. In altre parole, composizioni di applicazioni lineari sono lineari.

Cor. *$f : U \to V$ e $g : V \to W$ isomorfismi $\Rightarrow$ $g \circ f : U \to W$ isomorfismo.*

Dim. $g \circ f$ è lineare e invertibile con inversa $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Oss. In altre parole, composizioni di isomorfismi sono isomorfismi.

Teor. *Siano $f : V \to W$ lineare e $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base per V. Allora*

(1) *f iniettiva $\Leftrightarrow$ $f(v_1), \dots, f(v_n)$ linearmente indipendenti.*

(2) *f suriettiva $\Leftrightarrow$ $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano W.*

(3) *f isomorfismo $\Leftrightarrow$ $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ base per W.*

Dim. (1) $\boxed{\Rightarrow}$ $\forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) = 0_W \Rightarrow f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = 0_W \Rightarrow$ $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in \ker f = \{0_V\} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0_V \Rightarrow \alpha_i = 0$, $\forall\, i = 1, \dots, n$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, v \in \ker f \rightsquigarrow v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \Rightarrow 0_W = f(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) \Rightarrow$ $\alpha_i = 0$, $\forall\, i = 1, \dots, n \Rightarrow v = 0_V \Rightarrow \ker f = \{0_V\} \Rightarrow f$ iniettiva.

(2) Segue subito dal fatto che $\operatorname{im} f = \operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$.

(3) Segue subito dalle precedenti. $\square$

Cor. $V \cong W \Rightarrow \dim V = \dim W$.

Teor. *Sia $f : V \to W$ lineare e $\dim V = \dim W < \infty$. Sono equivalenti:*

(1) *f iniettiva;*

(2) *f suriettiva;*

(3) *f isomorfismo;*

Dim. Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base per V, con $n = \dim V = \dim W$.

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ $f(v_1), \dots, f(v_n)$ linearmente indipendenti $\Rightarrow$ base per W.

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano $W \Rightarrow$ base per W.

$\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$ Per definizione di isomorfismo. $\square$

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + y \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} L_A = \operatorname{rg} A = 2 \Rightarrow L_A$ suriettiva e quindi isomorfismo.