Lezione 15 novembre 2023

mercoledì 15 novembre 2023 11:15

Appelli: 16/1, 30/1, 20/2 } prove scritte, aula 1A ed. H3
9:00
su Esse 3 : PROVE PARZIALI

prove orali: 18/1, 1/2, 22/2
ORALI a partire dalle 9:00
(event. 1 giorno prima)
CONVOCAZIONE : MERCOLEDÌ SERA
a gruppi di 4 o 6 all'ora

Visto:

$$\bullet\ \operatorname{rg} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{OE}}}{A} = \operatorname{rg} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{a scala}}}{\tilde{A}} = r = \#\text{ righe non nulle} = \#\text{ pivot}$$

$$= \operatorname{rg} {}^t\tilde{A} = \operatorname{rg} {}^tA$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA$$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$,

$$\operatorname{rg} A = \dim \underbrace{\operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})}_{\subseteq \mathbb{K}^m}$$

$$\operatorname{rg} {}^tA = \dim \underbrace{\operatorname{Span}(A_{(1)}, \dots, A_{(m)})}_{\subseteq \mathbb{K}^n}$$

~ · ~ · ~

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

Sia $A \cdot X = b$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.
Allora il SL è COMPATIBILE $\iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg} \underbrace{(A|b)}_{\text{matrice completa}}$

(oss. in generale : $\operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}(A|b)$

$\operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}(A|b) \leq \operatorname{rg}(A)+1$)

Dim.: Ricordo Lemma:

$A \cdot X = b$ è compatibile $\iff b \in \operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$

$\iff \operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$

$$\Rightarrow \underbrace{\dim \operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})}_{= \operatorname{rg} A} = \underbrace{\dim \operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)}_{\operatorname{rg}(A|b)}$$

Infine: $\dim \operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \dim \operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, b)$

$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b)$

sappiamo che $\underbrace{\operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})}_{W} \subseteq \underbrace{\operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)}_{V}$

hanno stessa dim $\Rightarrow W = V$

in particolare: $b \in \operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$

$\underset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}$ il SL è compatibile.

Teo RC : seconda parte: Se $A \cdot X = b$ è compatibile, allora la generica soluzione dipende da $\underset{\substack{\downarrow \\ \#\text{ incognite}}}{n} - \operatorname{rg} A$ parametri liberi.

Dim.: Ricordo Teo Struttura per soluz. di $A \cdot X = b$: sia $\tilde{s}$ una soluz. particolare; allora ogni $s = \tilde{s} + s_0$, al variare di $s_0 \in W$ soluzioni di $AX = 0$

Teorema di Dimensione (da vedere)

$$\dim W = n - \operatorname{rg} A = n - r$$

posso fissare base di W :

$$\{w_1, w_2, \dots, w_{n-r}\}$$

$\Rightarrow s_0 \in W, \quad s_0 = t_1 w_1 + t_2 w_2 + \dots + t_{n-r} w_{n-r}$

$t_i \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow \quad s = \tilde{s} + t_1 w_1 + t_2 w_2 + \dots + t_{n-r} w_{n-r}$$

al variare degli $n-r$ parametri $t_1, \dots, t_{n-r} \in \mathbb{K}$
trovo tutte le soluzioni di $A \cdot X = b$

Esempio:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \overset{\neq 0}{1} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{II - I} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)}_{\widetilde{(A|b)}}$$

(with $\tilde{A}$ under the first three columns)

$$\Rightarrow \operatorname{rg} \tilde{A} = \operatorname{rg} \widetilde{(A|b)} = \operatorname{rg} (A|b)$$
$$= \operatorname{rg} A = 2$$

$\Rightarrow$ RC è compatibile

la gen. soluz. dipende da $n-r$ parametri,
cioè: $3 - 2 = 1 = \dim W$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \quad ; \text{ pongo } \quad x_3 = t$$

$$x_2 = -\frac{t+3}{2}$$

$$x_1 = 1 - x_2 + x_3 = 1 + \frac{t+3}{2} + t = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}t$$

$$\Rightarrow \text{gen. soluz.} \quad s = \begin{pmatrix} 5/2 + 3/2\, t \\ -3/2 - 1/2\, t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2\, t \\ -1/2\, t \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 5/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \tilde{s}} + t \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s - \begin{pmatrix} 5/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$s - \tilde{s}$ sono tutte e sole soluz. di $A \cdot X = 0$
(vedere dim. Teo Struttura)

$$W = \left\{ t \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Span}\left(\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

La gen. soluz si scrive nella forma

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\tilde{s}} + \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

OSS:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

posso scegliere come incognita libera $x_2 = a$

$$x_3 = -2a - 3$$

$$x_1 = 1 - x_2 + x_3 = 1 - a - 2a - 3 = -2 - 3a$$

$$\Rightarrow \text{gen. soluz. } s = \begin{pmatrix} -2 - 3a \\ a \\ -3 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + a \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$= \tilde{s} + a s_0$$

sono proporzionali e infatti devono essere una base delle stessa retta vettoriale W

RANGO E INVERTIBILITÀ

Teorema: $A \in M_n(K)$ ($n \times n$) quadrata è invertibile $\Longleftrightarrow$ $\text{rg}\, A = n$

Dim.: Supp. A invertibile; $\exists\, M$ $n \times n$ t.c.

$$\boxed{A \cdot M = I_n}$$

$$A \overset{M}{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}$$

$$\underset{n \times 1}{(A \cdot M)^{(1)}} = \underset{n \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{M^{(1)}} = (I_n)^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 \in K^n$$

$$(A \cdot M)^{(2)} = A \cdot M^{(2)} = (I_n)^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_2 \in K^n$$

$$\vdots$$

$$(A \cdot M)^{(n)} = A \cdot M^{(n)} = (I_n)^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = e_n \in K^n$$

$$\left.\begin{array}{ll} A\cdot M^{(1)} = e_1 & \Longleftrightarrow M^{(1)} \text{ è soluz. } A\cdot X = e_1 \\ A\cdot M^{(2)} = e_2 & \Longleftrightarrow M^{(2)} \text{ è soluz. } A\cdot X = e_2 \\ \vdots & \qquad \vdots \\ A\cdot M^{(n)} = e_n & \qquad M^{(n)} \text{ è soluz. } A\cdot X = e_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Lemma} \Longrightarrow \\ e_1, e_2, \dots, e_n \in \operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Span}(e_1, e_2, \dots, e_n) \subseteq \operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq \mathbb{K}^n$$

$$\Longrightarrow \mathbb{K}^n = \operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$$

$$\Longrightarrow \operatorname{rg} A = \dim \uparrow = \dim \mathbb{K}^n = n$$

Viceversa: supp. $\operatorname{rg} A = n$

cerco M t.c. $A\cdot M = \mathbb{I}_n$; per visto prima

le colonne di M saranno soluzioni di $\begin{cases} A\cdot X = e_1 \\ A\cdot X = e_2 \\ \quad\vdots \\ A\cdot X = e_n \end{cases}$

Per RC, $A\cdot X = e_i$ è compatibile $\Longleftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|e_i)$

$\operatorname{rg} A = n$ per ipotesi;

$$n = \operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(A|e_i) = \dim \underbrace{\operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, e_i)}_{\subseteq \mathbb{K}^n} \leq n$$

$\Longrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|e_i)$

$\Longrightarrow \exists$ soluz. $M^{(i)}$ di $A\cdot X = e_i$

pongo $M = (M^{(1)}\ M^{(2)} \dots M^{(n)})$

$A\cdot M = \mathbb{I}_n$

Analog. verifico che $M\cdot A = \mathbb{I}_n$ (esercizio:

$${}^tA\cdot {}^tM = \mathbb{I}_n$$

$${}^t(M\cdot A) = {}^t\mathbb{I}_n$$

$$= {}^tA\cdot {}^tM = \mathbb{I}_n$$

Esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ non è invertibile

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}m_{11}\\m_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad \left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\1&1&0\end{array}\right)\underset{II-I}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&0&-1\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{12}\\m_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} A = 1 \neq \operatorname{rg}(A|e_1)=2$

CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA:

Supp. A invertibile (quindi $\operatorname{rg} A = n$)

$$(A \mid I_n)$$

$n \times 2n$

Con OE :

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|cccc}1&*&\cdots&&*&*&*&\cdots&*\\0&1&\cdots&&*&*&*&\cdots&*\\\vdots&&\ddots&&&\vdots&&&\\0&\cdots&&1&*&&&&\\&&&0&1&*&\cdots&&*\end{array}\right)$$

Con OE dal basso verso l'alto, possiamo fare in modo

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&0&\cdots&0&*&\cdots&*\\0&1&&\vdots&\vdots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&0&&&\\0&\cdots&0&1&*&\cdots&*\end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{=A^{-1}}$$