Lezione 16 novembre 2023

giovedì 16 novembre 2023 11:15

Visto: Se A invertibile, allora

$(A \mid I_n)$ con OE

viene trasformata in $(I_n \mid M)$

$M = A^{-1}$

Infatti: visto : A invertibile: $A \cdot M = I_n$

$\Leftrightarrow \quad A \cdot M^{(i)} = e_i$

cerco M, ovvero $\circledast \begin{cases} A \cdot x = e_1 \\ A \cdot x = e_2 \\ \vdots \\ A \cdot x = e_n \end{cases}$

voglio risolvere questi SL contemporaneamente

$(A \mid e_1 \; e_2 \cdots e_n)$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} \tilde{a}_{11} & * & & * \\ 0 & \tilde{a}_{22} & & * \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{nn} \end{matrix}}_{\tilde{A}} \middle| \; v_1 \; v_2 \cdots v_n \right)$$

A invertibile $\Rightarrow$ rg $A = n =$ rg $\tilde{A} \Rightarrow$ ci sono n pivot $\Rightarrow \tilde{a}_{ii} \neq 0$

Ora : con $\textcircled{\text{OE2}}$, faccio $(\tilde{a}_{ii})^{-1} \cdot (\tilde{A})_{(i)}$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & * & \cdots & & * \\ 0 & 1 & \cdots & & * \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & & & 1 & c_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{matrix}}_{\tilde{\tilde{A}}} \middle| \; w_1 \; w_2 \cdots w_n \right)$$

$\textcircled{\text{OE3}}$: $(\tilde{\tilde{A}})_{(n-1)} \longleftrightarrow (\tilde{\tilde{A}})_{(n-1)} - c_{n-1\,n} \tilde{\tilde{A}}_{(n)}$

$$\left(\begin{matrix} & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 \; 1 & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \; u_1 \cdots u_n \right)$$

così procedendo è possibile trovare

$(I_n \mid M)$

Ho trovato n SL equivalenti a $\circledast$

$$\begin{cases} \mathbb{I}_n \cdot X = M^{(1)} \\ \mathbb{I}_n \cdot X = M^{(2)} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \mathbb{I}_n \cdot X = M^{(n)} \end{cases} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbb{I}_n \cdot X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{cases} x_1 = m_{11} \\ x_2 = m_{21} \\ \vdots \\ x_n = m_{n1} \end{cases} \Rightarrow$$

la soluz. del primo SL è $\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix} = M^{(1)}$

$$\vdots$$

$$\mathbb{I}_n \cdot X = M^{(n)} \quad , \quad X = M^{(n)} \Rightarrow$$

la soluz. dell'n-esimo SL è $\begin{pmatrix} m_{1n} \\ m_{2n} \\ \vdots \\ m_{nn} \end{pmatrix} = M^{(n)}$

Es.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \ ; \ \operatorname{rg} A = ?$$

$$\xrightarrow[II - I]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \operatorname{rg} A = 2 \Rightarrow A \text{ invertibile}$$

$$(A \mid \mathbb{I}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[II - I]{} \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[I - 2 \cdot II]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}\quad\underbrace{\qquad\qquad}$$

$= \mathbb{I}_2$ $\quad = A^{-1}$

prova: $\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Es.: $A = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

rg $A = ?$

$\mathrm{III} - \mathrm{I}$ $\quad \mathrm{II} - \mathrm{I}$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&-2\\0&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III} - \frac{1}{2}\mathrm{II}} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&-2\\0&0&-2\end{pmatrix} \qquad \text{rg } A = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III} - \mathrm{I}]{\mathrm{II} - \mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-2&-1&1&0\\0&-1&-3&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III} - \frac{1}{2}\mathrm{II}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-2&-1&1&0\\0&0&-2&-1/2&-1/2&1\end{array}\right)$$

$$\begin{matrix}-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{II}\\ -\frac{1}{2}\cdot\mathrm{III}\end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&1/2&-1/2&0\\0&0&1&1/4&1/4&-1/2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{II} - \text{III}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{2} & \boxed{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{I} - 2\cdot\text{II}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \boxed{3} & \boxed{1/2} & \boxed{3/2} & \boxed{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1/4} & \boxed{1/4} & \boxed{-1/2} \end{array}\right)$$

$$\text{I} - 3\cdot\text{III} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{1/4} & \underbrace{1/4} & \underbrace{-1/2} \end{array}\right)$$

$$A \cdot M = \mathbb{I}_3$$

$$A \cdot 4 \cdot M = 4 \cdot \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

~ · ~ · ~

RANGO & SOTTOMATRICI

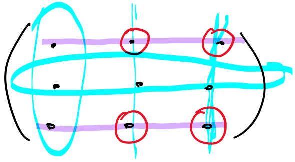
Def: $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

sia $p \in \{1, \dots, m\}$, $q \in \{1, \dots, n\}$

e siano $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m$

$1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n$

$A(i_1 \dots i_p \mid j_1 \dots j_q)$ è la sottomatrice di A, di tipo $p \times q$



il cui gen. elemento $\left(A(i_1 \dots i_p | j_1 \dots j_q)\right)_{k\,l} = a_{i_k j_l}$

$\forall\, k = 1, \dots, p, \quad \forall\, l = 1, \dots, q$

$$A_{(i_1)} \quad\quad A^{(j_1)}$$
$$\vdots \quad\quad\quad \vdots$$
$$A_{(i_p)} \quad\quad A^{(j_q)}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} p = 2 \\ q = 2 \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} i_1 = 1 \\ i_2 = 3 \\ j_1 = 2 \\ j_2 = 3 \end{matrix}$$

$$A(1\ 3\ |\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2×2

Prop: ① se $A \in M_{m,n}(K)$, B sottomatrice qualunque di A. Allora $\operatorname{rg} B \leq \operatorname{rg} A$

② se $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora

$$\operatorname{rg} A = \max \{ \operatorname{rg}(B) \mid B \text{ è sottomatrice quadrata } (p=q) \text{ di } A \}$$

es. $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

Es: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ $\underline{II} - I$, $\underline{III} - I$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\rho = 2$

~ . ~ . ~ . ~

APPLICAZIONI LINEARI (TRASFORMAZIONI)

Def.: Siano V e V' SV su K.

Una APP. LINEARE tra V e V' è una funzione

$$f : V \longrightarrow V' \quad \text{t.c.}$$

AL1 ADDITIVITÀ:

$\forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$: f CONSERVA LA SOMMA (f è omom. risp. $(V,+)$)

AL2 OMOGENEITÀ:

$\forall c \in K, \ \forall v \in V : \ \underset{\text{in } V}{f(c \cdot v)} = \underset{\text{in } V'}{c \cdot f(v)}$ f conserva prodotto per scalari

Se f AL è biiettiva, allora f si dice ISOMORFISMO.

OSS.: Se f è AL, allora

$$f(0_V) = 0_{V'}$$

infatti $0_V = 0 \cdot v$, $0 \in K$ zero

$v \in V$ vettore qualunque

$$f(0_V) = f(0 \cdot v) \underset{\text{AL2}}{=} 0 \cdot f(v) = 0_{V'}$$

OSS: Cons. $W = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) \subseteq V$

Cons. $f : V \longrightarrow V'$ AL

$$f(W) := \{ w' \mid \exists\, w \in W : f(w) = w' \}$$

$$w' = f(w) = f(c_1 w_1 + \dots + c_k w_k)$$

$w \in W \Rightarrow w = c_1 w_1 + \dots + c_k w_k$

$$\overset{\text{AL1}}{=} f(c_1 w_1) + f(c_2 w_2 + \dots + c_k w_k)$$

$$= f(c_1 w_1) + f(c_2 w_2) + f(c_3 w_3 + \dots + c_k w_k)$$

$$\vdots$$

$$= f(c_1 w_1) + f(c_2 w_2) + \dots + f(c_k w_k)$$

$$\overset{\text{AL2}}{=} c_1 f(w_1) + c_2 f(w_2) + \dots + c_k f(w_k)$$

$$\Rightarrow \forall\, w' \in f(W),\quad w' \in \mathrm{Span}(f(w_1), \dots, f(w_k))$$

$$\Rightarrow f(W) \subseteq \mathrm{Span}(f(w_1), \dots, f(w_k))$$

Vale anche $\supseteq$: se cons.

$$a_1 f(w_1) + \dots + a_k f(w_k) \overset{\text{AL2}}{=} f(a_1 w_1) + \dots + f(a_k w_k)$$

$$\overset{\text{AL1}}{=} f(\underbrace{a_1 w_1 + \dots + a_k w_k}_{\in\, \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k) = W})$$

PROP: Se $f: V \to V'$ è AL

$\forall W$ ssv finitamente generato,

si ha $f(W)$ è ssv di V', finitamente generato, $f(w_1), \dots, f(w_k)$ sono INS. DI GENERATORI.

COR.: Se V ha dim n, e $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V; sia $f: V \to V'$ AL.

Allora $f(V) \subseteq V'$ è ssv generato dai vettori $f(v_1), \dots, f(v_n)$.

Def: $f(V) =: \mathrm{Im}\, f$ IMMAGINE DI f

Def.: se V è fin. generato,

$\dim f(V) =: \mathrm{rg}\, f$ RANGO DI f.

Esempi: ① $\exists$ AL costanti?

Se $\exists$, sono nec. AL NULLE, cioè

$f: V \to V'$ t.c. $\forall v \in V$

$f(v) = 0_{V'}$ (perché $f(0_V) = 0_{V'}$)

Vediamo se $f(v) = 0_{V'}$ $\forall v$ è AL

(AL1) $f(v_1 + v_2) = 0_{V'}$

$= f(v_1) + f(v_2) = 0_{V'} + 0_{V'} = 0_{V'}$

$$\boxed{AL2}\quad \begin{cases} f(c\cdot v) = 0_{V'} \\ c\cdot f(v) = c\cdot 0_{V'} = 0_{V'} \end{cases}$$

Esempio: $Id_V : V \to V$ IDENTITÀ

$Id_V(v) = v \quad \forall v \in V$ è AL

Esempio: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

cons. l'applicazione MOLTIPLICAZ. PER A

$$L_A(v) := \underbrace{\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{v}}_{m\times 1}$$

$$L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

è AL?

$$L_A(v_1 + v_2) = A\cdot(v_1 + v_2)$$

| DISTRIB. del prod RC

$$= A\cdot v_1 + A\cdot v_2$$

$$= L_A(v_1) + L_A(v_2)$$

$$L_A(c\cdot v) = A\cdot(c v) = c\,(A\cdot v)$$

$$= c\cdot L_A(v)$$

Esempio: $V = \mathcal{C}^1((a,b), \mathbb{R})$ Funzioni derivabili

su $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$

con derivate continue

$V' = \mathcal{C}^0((a,b), \mathbb{R})$ funzioni continue

su $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$

$$D : \mathcal{C}^1((a,b), \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0((a,b), \mathbb{R})$$

$D(f) = f'$ derivata di f

$$D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g)$$

$$D(c \cdot f) = (c \cdot f)' = c \cdot f' = c \cdot D(f)$$