Lezione 17 novembre 2023

venerdì 17 novembre 2023 11:10

Visto: AL tra SV $f: V \to V'$

Def: $\operatorname{rg} f := \dim \operatorname{Im} f$

$\operatorname{Im} f = f(V) = \{ v' \in V' : \exists\, v \in V \text{ t.c. } f(v) = v' \}$

Se $\operatorname{Im} f = V'$, f è suriettiva.

Oss.: · Se V' è finit. generato, sicuramente anche $\operatorname{Im} f \subseteq V'$ ha dim finita

· Se V è finit. generato

se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\left(f(v_1), \dots, f(v_n)\right)$$

In particolare, $\operatorname{Im} f$ è finitamente generato.

$$\bullet \quad \boxed{\dim \operatorname{Im} f \leq n = \dim V}$$

Es: Può esistere $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ AL e suriettiva? NO $\dim \operatorname{Im} f \leq 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ AL non è mai suriettiva

OSS.: Perché usiamo parola RANGO DI f?
Perché è generalizzazione di rango di matrici:

Infatti: sia $A \in M_{m,n}(K)$; la molt. per A definisce una AL:

$$L_A : K^n \longrightarrow K^m$$

$$L_A\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\right) := A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} L_A = ?$

$\text{rg}\, L_A = \dim \operatorname{Im} L_A = \text{rg}\, A$

$\operatorname{Im} L_A = \text{Span}\left(L_A(e_1), \dots, L_A(e_n)\right) = \text{Span}\left(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\right)$

$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base del dominio $\mathbb{K}^n$

$$L_A(e_1) = A \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} = A^{(1)}$$

$$A \underset{m \times 1}{\overset{\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\ \vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}}} = A^{(1)}, \qquad A \overset{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\ \vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}} = A^{(2)}$$

$$L_A(e_2) = A \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} = A^{(2)}$$

TEOREMA STRUTTURA PER AL
(ovvero DI DETERMINAZIONE di AL)

Siano V e V' SV su $\mathbb{K}$, siano

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ BASE di V

$w_1, \dots, w_n$ VETTORI ARBITRARI di V'

Allora $\exists!\, f : V \to V'$ AL t.c.

$f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2,\ \dots,\ f(v_n) = w_n.$

Dim.: Esistenza: Sia $v \in V$

$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in V$

pongo $f(v) := a_1 w_1 + \dots + a_n w_n \in V'$

affermo che f è AL e che $f(v_i) = w_i$

f è AL: $f(v+u) \overset{?}{=} f(v) + f(u)$

$u = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$, $v+u = (a_1+b_1)v_1 + \cdots + (a_n+b_n)v_n$

$$f(v+u) = (a_1+b_1)w_1 + \cdots + (a_n+b_n)w_n$$

$$= a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n + b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n$$

$$= f(v) + f(u)$$

omogeneità: simile

Controllo che $f(v_i) = w_i$

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n$$

$$f(v_1) = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \cdots + 0 \cdot w_n = w_1$$

$$f(v_2) = 0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + \cdots + 0 \cdot w_n = w_2$$

$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \cdots + 0 \cdot v_n$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = w_n$$

Unicità: Supp. $g : V \to V'$ AL t.c.

★ $\boxed{g(v_i) = w_i}$ $\forall i = 1, \dots, n$

cons. generico $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$

$$g(v) = g(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) \underset{\substack{\downarrow \\ g\ AL}}{=} c_1 g(v_1) + \cdots + c_n g(v_n)$$

$$= c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_n w_n = f(v)$$

★

$\Rightarrow$ $f \equiv g$ uguali come funzioni

* * *

NUCLEO DI AL
(KERNELL ; KERN)

Def: Data $f : V \to V'$ AL

$$\ker f := \{ v \in V : f(v) = 0_{V'} \} \subseteq V$$

$\cup$

0_V

PROP.: ① $\ker f \subseteq V$ è SSV

② $\ker f = \{0_V\} \Longleftrightarrow f$ è INIETTIVA

Dim: ① Cons. $v, u \in \ker f$ $\Rightarrow$ $f(v) = 0_{V'}$

$f(u) = 0_{V'}$

Siano $a, b \in K$

voglio mostrare che $av + bu \in \ker f$

$$f(av+bu) = f(av) + f(bu)$$
$$\overset{!}{=} a\,f(v) + b\,f(u)$$
$$\overset{!}{=} a\cdot 0_{V'} + b\cdot 0_{V'} = 0_{V'}$$

② $\ker f = \{0_V\} \iff f$ è iniettiva

$\Leftarrow$: f iniettiva : supp. $v \in \ker f$

$$f(v) = 0_{V'} = f(0_V)$$

f iniettiva $\Rightarrow v = 0_V$

$\Rightarrow$: supp. $\boxed{\ker f = \{0_V\}}$

siano $v, u \in V$ tali che

$$f(v) = f(u)$$
$$f(v) - f(u) = 0_{V'} \in V'$$

AL : $f(v-u) = 0_{V'}$

$\Rightarrow v - u = 0_V \in V$

$\Rightarrow v = u$

Teorema: DI DIMENSIONE per AL

V sv finitamente generato, V' sv

e sia $f: V \to V'$ AL. Allora vale:

$$\underline{\dim \boxed{V}} = \underline{\dim \boxed{\ker f}^{\subseteq V}} + \underline{\mathrm{rg}}\, f$$

$$= \underbrace{\dim \ker f}_{\geq 0} + \dim \boxed{\mathrm{Im} f}_{\subseteq V'}$$

In particolare $\dim V \geq \dim \mathrm{Im} f$

Dim.: $\ker f \subseteq V$

Fisso base $\mathcal{B}_{\ker f} = \{v_1, \dots, v_k\}$

prolungo a base di V:

$$\{v_1, \dots, v_k, \underbrace{v_{k+1}, \dots, v_n}\}$$

$\dim \ker f = k$

$\dim V = n$

voglio dim che $\dim \mathrm{Im} f = n-k$

base di $\mathrm{Im} f$: $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$