Esercizi di Geometria
settimo foglio

November 17, 2023

1. Sia $f : V \to V'$ una applicazione lineare biiettiva (un isomorfismo). Si dimostri che allora anche la funzione inversa
$$f^{-1} : V' \to V$$
è un'applicazione lineare.

2. Si consideri lo spazio dei numeri complessi $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale di dimensione 1 su $\mathbb{C}$. Si dimostri che la funzione
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \overline{z},$$
dove $\overline{z}$ è il coniugato di z, è una funzione additiva (verifica (AL1)), ma non omogenea (non verifica (AL2)).

3. Si consideri la funzione
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$
Si dimostri che f è omogenea (verifica (AL2)), ma non additiva (non verifica (AL1)).

4. (a) Siano V e V' due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Nel prodotto cartesiano $V \times V'$ si considerino le seguenti operazioni
$$+ : (V \times V') \times (V \times V') \to V \times V', \quad (v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2),$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times (V \times V') \to V \times V', \quad c \cdot (v, w) := (cv, cw).$$
Si dimostri che con queste scelte $V \times V'$ risulta uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

   (b) Sia $f : V \to V'$ un'applicazione fra spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Il **grafico** di f è il sottinsieme di $V \times V'$ così definito:
$$\Gamma_f = \{(v, w) \in V \times V' \mid w = f(v), v \in V\}.$$
Si dimostri che f è lineare se e solo se Γ_f è sottospazio vettoriale di $V \times V'$ (con la struttura di spazio vettoriale definita nel primo punto).

5. Si verifichi che l'applicazione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

è un'applicazione lineare. Si determini, inoltre, $\ker f$ e $\mathrm{Im}\ f$ e le loro dimensioni.

6. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare che soddisfi:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si scriva il valore di f nel generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$.

Si determinino, inoltre, $\ker f$ e una sua base e $\mathrm{Im} f$ e una sua base.

7. Si dica, motivando la risposta, se può esistere un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che assuma i seguenti valori:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

8. Si trovi un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\ker f = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

e tale che

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

9. Usando il Teorema della dimensione e il Teorema di Struttura per Applicazioni Lineari, in ciascuno dei tre casi seguenti determinare, se esistono, applicazioni lineari che soddisfano le condizioni indicate; nel caso in cui ne esista più d'una, trovarne almeno due distinte.

   (a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettiva e tale che $\ker f = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$;

   (b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\mathrm{Im} g = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$;

(c) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ iniettiva e tale che $\mathrm{Im} h = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

10. In $\mathbb{R}^5$ si consideri il sottospazio vettoriale W generato dai seguenti vettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Estrarre da $v_1, \ldots, v_5$ una base $\mathcal{B}_W$ di W e determinare $\dim W$.

(b) Completare $\mathcal{B}_W$ a una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^5$.

(c) Applicando il Teorema di struttura per applicazioni lineari, costruire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ avente W come nucleo.