

# 1

Sono date le funzioni  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  definite come segue

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + T_1^2}, \quad g(t) = \theta(T_2 - |t|),$$

dove  $T_1$  e  $T_2$  sono parametri positivi, e  $\theta(x)$  è la funzione theta di Heaviside

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(i) Si calcolino le trasformate di Fourier  $\hat{f}(\omega)$  e  $\hat{g}(\omega)$ .

(ii) Si calcoli il prodotto di convoluzione  $(f \star g)(t)$  e si verifichi che  $f \star g \in L^1(\mathbb{R})$ .

(iii) Si calcoli la trasformata di Fourier  $\widehat{f \star g}(\omega)$  e si verifichi che coincide con il prodotto  $\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$ .

**Soluzione di (i) e (ii):** Iniziamo dal calcolare la trasformata di Fourier di  $f$  svolgendo l'integrale

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{1}{t^2 + T_1^2} e^{i\omega t}.$$

Per svolgere l'integrale usiamo il lemma di Jordan. Quando  $\omega \geq 0$  possiamo chiudere il cammino con un arco nel semipiano superiore e riceviamo contributo dal polo in  $t = iT_1$ , e viceversa quando  $\omega < 0$  possiamo chiudere il cammino con un arco nel semipiano inferiore e riceviamo contributo dal polo in  $t = -iT_1$ . Dunque

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \theta(\omega) 2\pi i \operatorname{Res}_{\frac{1}{t^2 + T_1^2} e^{i\omega t}}(iT_1) - \theta(-\omega) 2\pi i \operatorname{Res}_{\frac{1}{t^2 + T_1^2} e^{i\omega t}}(-iT_1) \\ &= \theta(\omega) 2\pi i \frac{1}{2iT_1} e^{-\omega T_1} - \theta(-\omega) 2\pi i \frac{1}{-2iT_1} e^{+\omega T_1} \\ &= \frac{\pi}{T_1} e^{-|\omega|T_1}. \end{aligned}$$

Per la funzione  $g$  l'integrale che calcola la trasformata è elementare e possiamo svolgerlo direttamente

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt g(t) e^{i\omega t} \\ &= \int_{-T_2}^{+T_2} dt e^{i\omega t} \\ &= \frac{e^{i\omega T_2} - e^{-i\omega T_2}}{i\omega} \\ &= \frac{2 \sin(T_2 \omega)}{\omega}. \end{aligned}$$

A questo punto procediamo a calcolare il prodotto di convoluzione, usando la definizione

$$\begin{aligned}
 (f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' f(t')g(t-t') \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' g(t')f(t-t') \\
 &= \int_{-T_2}^{+T_2} dt' \frac{1}{(t'-t)^2 + T_1^2} \\
 &= \int_{t-T_2}^{t+T_2} dt' \frac{1}{t'^2 + T_1^2} \\
 &= \frac{1}{T_1} \int_{\frac{t-T_2}{T_1}}^{\frac{t+T_2}{T_1}} dy \frac{1}{1+y^2} \\
 &= \frac{1}{T_1} \left( \arctan \left( \frac{t+T_2}{T_1} \right) - \arctan \left( \frac{t-T_2}{T_1} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Per  $x \rightarrow \pm\infty$  abbiamo

$$\arctan(x) = \pm \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \mathcal{O}(x^{-3}).$$

Usando questo sviluppo asintotico, vediamo che per  $t \rightarrow \infty$  abbiamo

$$\begin{aligned}
 (f \star g)(t) &= \frac{1}{T_1} \left( \left( \frac{\pi}{2} - \frac{T_1}{t+T_2} + \mathcal{O}(t^{-3}) \right) - \left( \frac{\pi}{2} - \frac{T_1}{t-T_2} + \mathcal{O}(t^{-3}) \right) \right) \\
 &= \frac{1}{T_1} \left( \left( \frac{\pi}{2} - \frac{T_1}{t} + \frac{T_1 T_2}{t^2} + \mathcal{O}(t^{-3}) \right) - \left( \frac{\pi}{2} - \frac{T_1}{t} - \frac{T_1 T_2}{t^2} + \mathcal{O}(t^{-3}) \right) \right) \\
 &= \frac{2T_2}{t^2} + \mathcal{O}(t^{-3}),
 \end{aligned}$$

e analogamente per  $t \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned}
 (f \star g)(t) &= \frac{1}{T_1} \left( \left( -\frac{\pi}{2} - \frac{T_1}{t+T_2} + \mathcal{O}(t^{-3}) \right) - \left( -\frac{\pi}{2} - \frac{T_1}{t-T_2} + \mathcal{O}(t^{-3}) \right) \right) \\
 &= \frac{1}{T_1} \left( \left( -\frac{\pi}{2} - \frac{T_1}{t} + \frac{T_1 T_2}{t^2} + \mathcal{O}(t^{-3}) \right) - \left( -\frac{\pi}{2} - \frac{T_1}{t} - \frac{T_1 T_2}{t^2} + \mathcal{O}(t^{-3}) \right) \right) \\
 &= \frac{2T_2}{t^2} + \mathcal{O}(t^{-3}).
 \end{aligned}$$

Quindi vediamo che  $(f \star g)(t)$  va a zero come  $t^{-2}$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ , inoltre è una funzione sempre limitata, pertanto abbiamo verificato esplicitamente che  $f \star g \in L^1(\mathbb{R})$ .

**Soluzione 1 di (iii):**

**Parentesi:**  $\arctan(z)$  come funzione di variabile complessa. Iniziamo dal riscrivere la funzione  $\arctan(z)$  in termini del logaritmo complesso. Usiamo che

$$w = \arctan(z) \implies z = \tan(w) = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{-i(e^{iw} - e^{-iw})}{e^{iw} + e^{-iw}} \implies e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Pertanto otteniamo

$$\arctan(z) = -\frac{i}{2} \log\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right). \quad (1)$$

Al momento non abbiamo specificato quale ramo del logaritmo vada scelto. Vorremmo scegliere il ramo in modo che per  $x \in \mathbb{R}$  questa definizione coincida con quella usuale della funzione  $\arctan$  con valori in  $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ . A tal fine notiamo che per  $z = x \in \mathbb{R}$  l'argomento del logaritmo si trova sul cerchio unitario, perché

$$\left(\frac{1 + ix}{1 - ix}\right)^* = \frac{1 - ix}{1 + ix} = \left(\frac{1 + ix}{1 - ix}\right)^{-1}.$$

Di conseguenza il logaritmo è un numero puramente immaginario per  $x \in \mathbb{R}$  e la funzione (1) è una funzione reale come vogliamo. Inoltre

$$\frac{1 + ix}{1 - ix} = \frac{(1 + ix)^2}{1 + x^2} = \frac{1 - x^2 + 2ix}{1 + x^2},$$

dunque per  $x < 0$  la parte immaginaria è negativa, ovvero  $\frac{1+ix}{1-ix}$  si trova sul semicerchio del cerchio unitario nel semipiano inferiore, e viceversa per  $x > 0$  la parte immaginaria è positiva, ovvero  $\frac{1+ix}{1-ix}$  si trova sul semicerchio del cerchio unitario nel semipiano superiore. I valori di  $x$  per cui  $\frac{1+ix}{1-ix}$  si trova sull'asse reale sono  $x = 0$ , per cui vale 1, e poi  $x \rightarrow +\infty$  /  $x \rightarrow -\infty$ , per cui tende a  $-1$  da sopra / da sotto. Pertanto scegliendo il taglio del logaritmo sull'asse reale negativo avremo che al variare di  $x$  sulla retta reale la funzione (1) è una funzione continua di  $x$ , perchè per nessun valore di  $x \in \mathbb{R}$  l'argomento del logaritmo attraversa il taglio sull'asse reale negativo, e ci tende solo asintoticamente per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Inoltre scegliendo il ramo principale, il logaritmo tende a  $-i\pi$  per  $x \rightarrow -\infty$ , e a  $+i\pi$  per  $x \rightarrow +\infty$ , dunque la funzione tende a  $\pm\pi/2$  per  $x \rightarrow \pm\infty$  proprio come l'usuale definizione della funzione  $\arctan$ . Quindi abbiamo trovato che la scelta corretta del ramo del logaritmo nell'equazione (1) è il ramo principale del logaritmo. Sostituendo  $z = x + iy$  in  $\frac{1+iz}{1-iz}$  è facile vedere che l'argomento del logaritmo in eq. (1) è un numero reale negativo per  $x = 0$  e  $|y| > 1$ , dunque la funzione  $\arctan(z)$  ha punti di diramazione in  $z = \pm i$  e il ramo scelto ha un taglio che va lungo l'asse immaginario da  $z = i$  a  $+i\infty$  e da  $z = -i$  a  $-i\infty$ , come illustrato a sinistra in figura 1.

Equivalentemente, possiamo scrivere la funzione in eq. (1) come

$$\arctan(z) = -\frac{i}{2} [\log(1 + iz) - \log(1 - iz)],$$

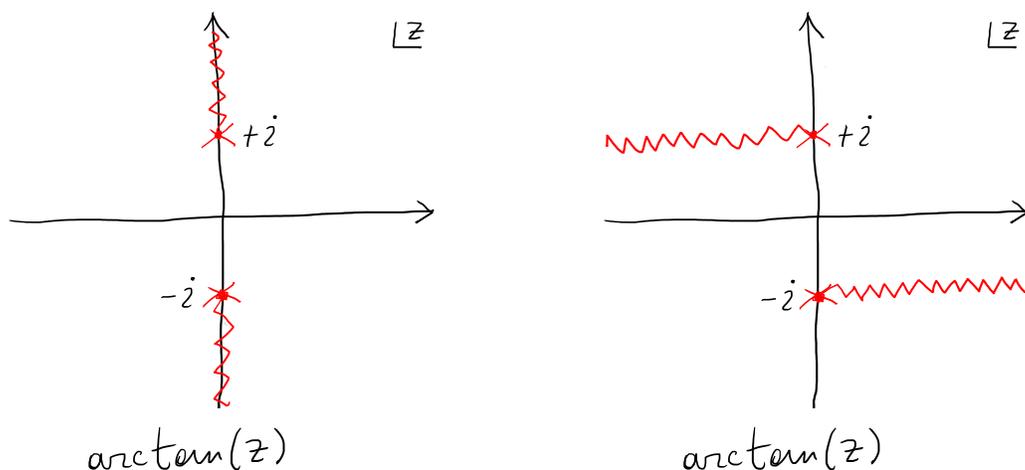


Figure 1: Due possibili scelte per la definizione di  $\arctan(z)$  come funzione di variabile complessa, in modo che coincida con l'usuale funzione di variabile reale sull'asse reale.

e scegliere il ramo per ciascuna delle due funzioni logaritmo. Se scegliamo per entrambi il ramo principale, con taglio sull'asse reale negativo e con valori della parte immaginaria nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ , otteniamo esattamente la definizione del paragrafo precedente, con il taglio verticale da  $+i$  a  $+i\infty$  (che viene da  $\log(1 + iz)$ ) e da  $-i\infty$  a  $-i$  (che viene da  $\log(1 - iz)$ ). Qualsiasi altra scelta facciamo per il ramo delle due funzioni logaritmo, dobbiamo verificare che i valori per  $z = x \in \mathbb{R}$  rimangano gli stessi, in modo che la funzione continui a coincidere con l'usuale  $\arctan$  reale sull'asse reale. Una scelta utile per lo svolgimento di questo problema risulta essere il ramo della funzione  $\log(w)$  con taglio sull'asse immaginario negativo e parte immaginaria nell'intervallo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ . Con queste scelte, il log coincide con il ramo principale in tutto il semipiano  $\text{Re}(w) > 0$ , e in particolare sulla retta parallela all'asse immaginario  $\{1 \pm ix\}_{x \in \mathbb{R}}$ , pertanto è ancora vero che la funzione coincide con l'usuale  $\arctan$  sull'asse reale. Definendo i due log in questo modo la funzione  $\arctan(z)$  ha tagli paralleli all'asse reale, uno che va da  $z = i - \infty$  a  $z = i$ , e l'altro che va da  $z = -i$  a  $z = -i + \infty$ , come illustrato a destra in figura 1. **Fine Parentesi.**

A questo punto consideriamo l'integrale che calcola la trasformata di Fourier di  $f \star g$

$$\widehat{(f \star g)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{1}{T_1} \left( \arctan \left( \frac{t + T_2}{T_1} \right) - \arctan \left( \frac{t - T_2}{T_1} \right) \right) e^{i\omega t}.$$

Promuoviamo la funzione integranda a una funzione di variabile complessa

$$F(z)e^{i\omega z}, \quad F(z) := \frac{1}{T_1} \left( \arctan \left( \frac{z + T_2}{T_1} \right) - \arctan \left( \frac{z - T_2}{T_1} \right) \right),$$

scegliendo la definizione vista nel paragrafo precedente per la funzione  $\arctan$  con due tagli paral-

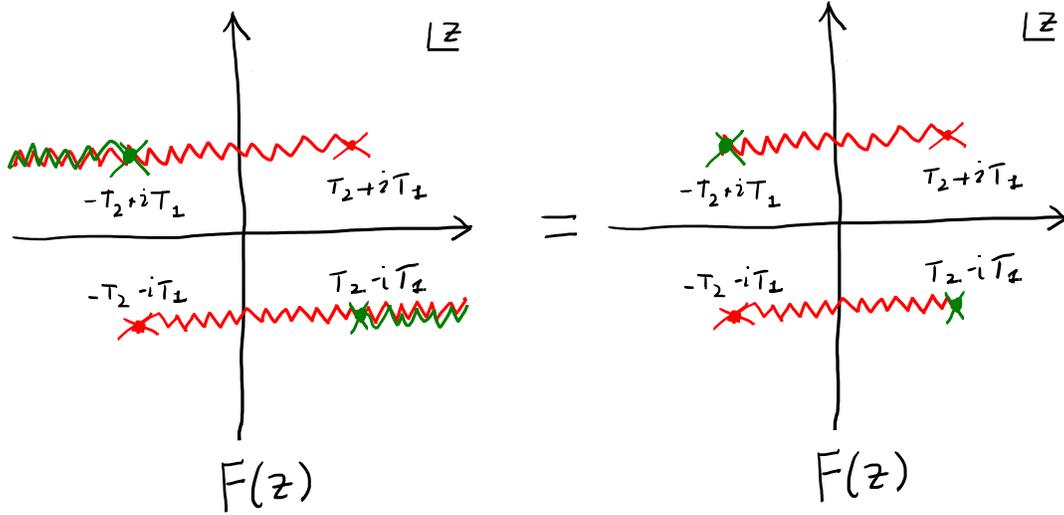


Figure 2: Prendendo la differenza tra le funzioni arctan rimane il taglio solo su un segmento nel semipiano superiore e un segmento nel semipiano inferiore.

leli all'asse reale, come illustrato a destra in figura 1. Con questa scelta, la funzione  $\arctan\left(\frac{z-T_2}{T_1}\right)$  ha tagli da  $z = -\infty + iT_1$  a  $z = T_2 + iT_1$  e da  $z = T_2 - iT_1$  a  $z = +\infty - iT_1$ , mentre  $\arctan\left(\frac{z+T_2}{T_1}\right)$  ha tagli da  $z = -\infty + iT_1$  a  $z = -T_2 + iT_1$  e da  $z = -T_2 - iT_1$  a  $z = +\infty - iT_1$ . Visto che le due funzioni hanno identica discontinuità al taglio, perché si tratta sempre della discontinuità del logaritmo, la loro differenza è continua dove questi due tagli si sovrappongono. Pertanto  $F(z)$  ha due tagli solo lungo i segmenti paralleli all'asse reale tra  $t = -T_2 + iT_1$  e  $t = T_2 + iT_1$  nel semipiano superiore, e tra  $t = -T_2 - iT_1$  e  $t = T_2 - iT_1$  nel semipiano inferiore, come illustrato in figura 2.

Consideriamo quindi l'integrale di  $F(z)e^{i\omega z}$  su un cammino tra  $-R$  e  $R$  sull'asse reale, e chiudiamo il cammino con un arco di raggio  $R$  centrato nell'origine nel semipiano superiore per  $\omega \geq 0$  e nel semipiano inferiore per  $\omega < 0$ . Visto che  $F(z)$  è olomorfa in un intorno di  $z = \infty$  possiamo usare lo sviluppo asintotico fatto sopra nel limite di  $z \rightarrow \infty$  lungo l'asse reale per concludere che  $F(z) = \frac{2T_2}{z^2} + \mathcal{O}(z^{-3})$ .<sup>1</sup> Utilizzando lo stesso argomento che abbiamo usato per dimostrare il Lemma di Jordan concludiamo che gli integrali sui due archi vanno a zero nel limite  $R \rightarrow \infty$ , dunque gli integrali sull'intero asse reale sono uguali agli integrali sui cammini chiusi. Infine per Cauchy possiamo deformare questi cammini chiusi a integrali che circondano gli intervalli dove la funzione ha i tagli, in senso antiorario nel semipiano superiore, e in senso

<sup>1</sup>In effetti il fatto che abbiamo trovato lo stesso sviluppo asintotico per  $x \rightarrow +\infty$  e  $x \rightarrow -\infty$  a posteriori si può vedere come una conseguenza del fatto che come funzione di variabile complessa  $f \star g$  è olomorfa in un intorno di  $\infty$ .

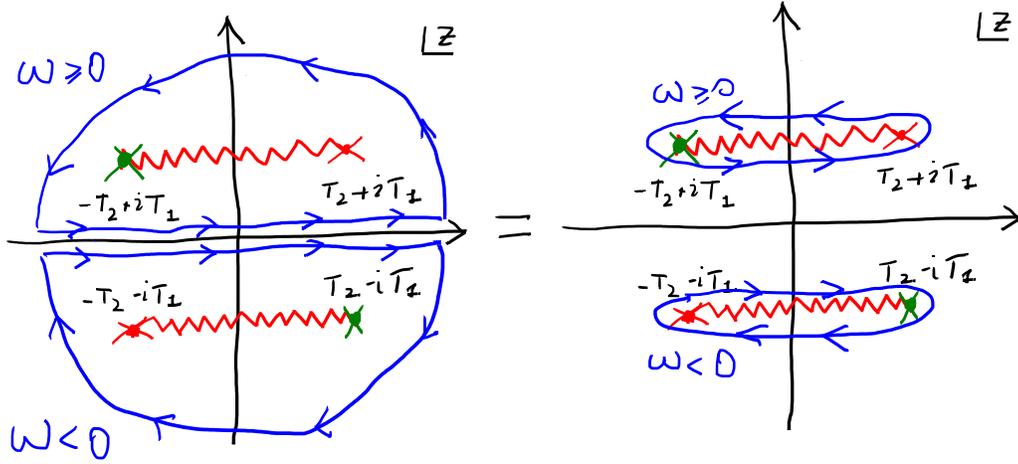


Figure 3: I cammini chiusi nel semipiano superiore ( $\omega \geq 0$ ) e nel semipiano inferiore ( $\omega < 0$ ) possono essere deformati in modo da circondare i tagli nei rispettivi semipiani.

orario nel semipiano inferiore, come illustrato in figura 3. Nel semipiano superiore (+) / inferiore (-) parametrizziamo il taglio ponendo  $z = x \pm iT_1$ , con  $x \in [-T_2, T_2]$ . Nel semipiano superiore, ovvero per  $\omega \geq 0$ , otteniamo

$$\begin{aligned}
& \int_{-T_2}^{+T_2} dx \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [(F(z)e^{i\omega z})|_{z=(x+iT_1)-i\epsilon} - (F(z)e^{i\omega z})|_{z=(x+iT_1)+i\epsilon}] \\
&= \int_{-T_2}^{+T_2} dx e^{i\omega x} e^{-T_1\omega} (-\text{Disc}_F(x + iT_1)) \\
&= \int_{-T_2}^{+T_2} dx e^{i\omega x} e^{-T_1\omega} \frac{1}{T_1} \frac{i}{2} (-2\pi i) \\
&= \frac{e^{i\omega T_2} - e^{-i\omega T_2}}{i\omega} \frac{\pi}{T_1} e^{-T_1\omega} \\
&= \frac{2 \sin(T_2\omega)}{\omega} \frac{\pi}{T_1} e^{-T_1\omega} .
\end{aligned}$$

Nel calcolare la discontinuità nella seconda uguaglianza abbiamo utilizzato che l'unico log che produce la discontinuità lungo questo intervallo è il  $\log(1 + i\frac{z-T_2}{T_1})$ , e questo log entra in  $F(z)$  con un coefficiente  $\frac{1}{T_1} \frac{i}{2}$ . Inoltre dando a  $z$  parte immaginaria  $T_1 + \epsilon$  con  $\epsilon > 0$  si ottiene un argomento del log con parte reale negativa, così che il log tende a  $\frac{3\pi i}{2}$  nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , mentre dando a  $z$  parte immaginaria  $T_1 - \epsilon$  si ottiene argomento con parte reale positiva, e il log tende a  $-\frac{i\pi}{2}$  nel limite, dunque la discontinuità è  $+2\pi i$ . Analogamente nel semipiano inferiore, per  $\omega < 0$ ,

otteniamo

$$\begin{aligned}
& \int_{-T_2}^{+T_2} dx \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [(F(z)e^{i\omega z})|_{z=(x-iT_1)+i\epsilon} - (F(z)e^{i\omega z})|_{z=(x-iT_1)-i\epsilon}] \\
&= \int_{-T_2}^{+T_2} dx e^{i\omega x} e^{T_1\omega} \text{Disc}_F(x - iT_1) \\
&= \int_{-T_2}^{+T_2} dx e^{i\omega x} e^{-T_1\omega} \frac{1}{T_1} \frac{i}{2} (-2\pi i) \\
&= \frac{e^{i\omega T_2} - e^{-i\omega T_2}}{i\omega} \frac{\pi}{T_1} e^{T_1\omega} \\
&= \frac{2 \sin(T_2\omega)}{\omega} \frac{\pi}{T_1} e^{T_1\omega} .
\end{aligned}$$

In questo caso nel calcolo della discontinuità abbiamo utilizzato che l'unico log che produce la discontinuità è  $\log\left(1 - i\frac{z+T_2}{T_1}\right)$ , che entra in  $F(z)$  con coefficiente  $\frac{1}{T_1} \frac{i}{2}$ . Quando  $z$  ha parte immaginaria  $-T_1 + \epsilon$  con  $\epsilon > 0$  l'argomento di questo log ha parte reale positiva, dunque il log tende a  $-i\frac{\pi}{2}$  nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , mentre quando  $z$  ha parte immaginaria  $-T_1 - \epsilon$  l'argomento ha parte reale negativa e il log tende a  $i\frac{3\pi}{2}$ , pertanto la discontinuità in questo caso è  $-2\pi i$ .

Infine mettendo insieme le due risposte per  $\omega \geq 0$  e  $\omega < 0$  troviamo

$$\widehat{f \star g}(\omega) = \frac{2 \sin(T_2\omega)}{\omega} \frac{\pi}{T_1} e^{T_1|\omega|} .$$

Pertanto abbiamo verificato che la trasformata del prodotto è il prodotto delle trasformate.

**Soluzione 2 di (iii):** Prendendo la derivata rispetto a  $t$  di  $(f \star g)(t)$  troviamo

$$\frac{d}{dt}(f \star g)(t) = \frac{1}{T_1^2 + (t + T_2)^2} - \frac{1}{T_1^2 + (t - T_2)^2} = f(t + T_2) - f(t - T_2) .$$

Usando le proprietà della trasformata di Fourier

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \left[ \frac{d}{dt}(f \star g) \right] (\omega) &= -i\omega \widehat{f \star g}(\omega) , \\
\mathcal{F} [f(\cdot \pm T_2)] (\omega) &= e^{\mp i\omega T_2} \hat{f}(\omega) ,
\end{aligned}$$

otteniamo

$$\widehat{f \star g}(\omega) = \frac{e^{-i\omega T_2} - e^{i\omega T_2}}{-i\omega} \hat{f}(\omega) = \frac{2 \sin(T_2\omega)}{\omega} \hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega) \hat{f}(\omega) .$$