Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 8

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Dimostrare che se $f_1 : X_1 \to Y_1$ e $f_2 : X_2 \to Y_2$ sono continue (risp. aperte), allora

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$$
$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) := (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

è continua (risp. aperta).

2) Dimostrare che se $A \subset X$ e $B \subset Y$ allora:

   (a) $\mathrm{Cl}(A \times B) = \mathrm{Cl}\, A \times \mathrm{Cl}\, B$;

   (b) $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}\, A \times \mathrm{Int}\, B$;

   (c) $\mathrm{Fr}(A \times B) = (\mathrm{Fr}\, A \times \mathrm{Cl}\, B) \cup (\mathrm{Cl}\, A \times \mathrm{Fr}\, B)$.

   Dedurre quindi la formula di Leibniz per la frontiera: se A e B sono chiusi allora

$$\mathrm{Fr}(A \times B) = (\mathrm{Fr}\, A \times B) \cup (A \times \mathrm{Fr}\, B).$$

   Esaminare il caso particolare del quadrato $\mathrm{Fr}_{R^2}([0, 1] \times [0, 1])$.

3) Descrivere la compattificazione di Alexandrov di $R \sqcup R$.

4) Sia $X = \{(x, y) \in R^2 \mid xy = 0\} \subset R^2$. Descrivere $\widehat{X}$.

5) Dimostrare che $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$, dove $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è il gruppo additivo quoziente.

6) Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ha la topologia banale.

7) Dimostrare che l'applicazione $\nu : CP^1 \to CP^2$, $\nu([z_0, z_1]) = [z_0^2, z_0 z_1, z_1^2]$ è un'immersione con immagine una conica non degenere (ν è detta *mappa di Veronese*). Dedurre che le coniche proiettive complesse non degeneri sono omeomorfe a S^2.