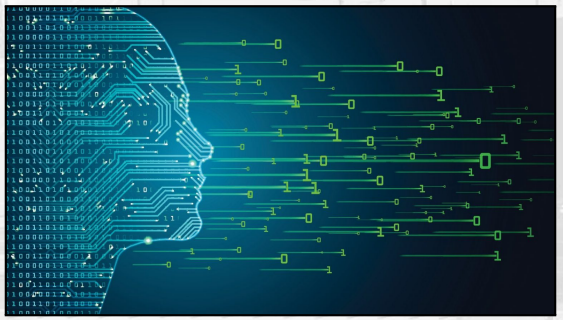
Programmazione Informatica
8. MATLAB, parte 3: funzioni per l'algebra lineare e l'analisi

Riccardo Zamolo
rzamolo@units.it

Università degli Studi Trieste
Ingegneria Civile e Ambientale



A.A. 2023-24

- Il sistema di m equazioni lineari in n incognite $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

  può essere scritto in forma matriciale come:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

  - $m = n$ e $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, ossia $\text{rank}(\mathbf{A}) = m = n$, $\Rightarrow$ sistema determinato;
  - $m > n \Rightarrow$ sistema sovradeterminato;
  - $m < n \Rightarrow$ sistema sottodeterminato.

- In MATLAB il precedente sistema si risolve con il comando *backslash*:

```
x=A\b
```

  che sceglie automaticamente che tipo di soluzione cercare in funzione delle dimensioni e delle proprietà della matrice $\mathbf{A}$.

- Calcolare la distanza tra un punto $\mathbf{P}_0$ nello spazio ed una retta r nella forma esplicita

$$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{v}$$

- Metodo A (minimizzazione esplicita): si determina esplicitamente il valore di λ che minimizza la distanza punto-retta, equivalente ad imporre $\mathbf{P}_0 - \mathbf{r}(\lambda)$ ortogonale a $\mathbf{v}$:

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\mathbf{P}_0 - \mathbf{r}(\lambda)\|^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{\lambda} = \frac{(\mathbf{P}_0 - \mathbf{r}_0)^T \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}$$

$$dist = \|\mathbf{P}_0 - \mathbf{r}(\bar{\lambda})\|$$

```
% Valori particolari
P0 = [ 1 ; 1 ; 0 ] ; % punto

r0 = [ 0 ; 0 ; 0 ] ; % retta, punto di partenza
v  = [ 1 ;-1 ; 0 ] ; % retta, vettore direzione
r  = @(l) r0 + l*v ; % funzione anonima della retta

% Metodo A
lambda = ( (P0-r0)' * v ) / ( v'*v ) ;
dist_A = norm( P0 - r(lambda) )
```

- Che fornisce il risultato:

```
dist_A =
      1.4142
```

- Metodo B (sottrazione componente parallela): si scompone la differenza $\mathbf{d} = \mathbf{P}_0 - \mathbf{r}_0$ in una componente parallela e in una ortogonale a $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_\mathbf{v} + \mathbf{d}_\perp$$

Fissato $\mathbf{e}_\mathbf{v} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ il vettore di lunghezza unitaria in direzione $\mathbf{v}$, la componente parallela si ottiene direttamente dal prodotto scalare lungo $\mathbf{e}_\mathbf{v}$ in quanto $\mathbf{d}_\perp \cdot \mathbf{e}_\mathbf{v} = 0$:

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_\mathbf{v} = \mathbf{d}_\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d}_\mathbf{v} = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_\mathbf{v})\mathbf{e}_\mathbf{v}$$

Si sottrae quindi a $\mathbf{d}$ la sua componente parallela a $\mathbf{v}$, lasciando quindi la componente ortogonale $\mathbf{d}_\perp$ la cui lunghezza è proprio la distanza cercata:

$$dist = \|\mathbf{d} - \mathbf{d}_\mathbf{v}\| = \|\mathbf{d}_\perp\|$$

```
% Metodo B
e_v      = v / norm(v) ;        % vettore unitario lungo v
d        = P0 - r0 ;            % differenza punto-partenza retta
d_v      = dot(d, e_v) * e_v ; % componente parallela
d_ortho = d - d_v ;            % componente ortogonale
dist_B   = norm( d_ortho )      % distanza
```

- Che fornisce il risultato:

```
dist_B =
      1.4142
```

- Metodo C (matriciale: ingiustificato e sconsigliato): si scrivono le condizioni di ortogonalità in forma esplicita:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d_v} + \mathbf{d}_\perp = \lambda \mathbf{v} + I_3 \mathbf{d}_\perp$$
$$\mathbf{d}_\perp \cdot \mathbf{v} = 0$$

Si assumono come incognite il vettore ortogonale $\mathbf{d}_\perp$ ed il coefficiente λ, per un totale di 3+1 scalari, da esprimere mediante il seguente sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} I_3 & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_\perp \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ 0 \end{Bmatrix}$$
$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

```
% Metodo C (esagerato)
I3 = eye(3,3) ;
M  = [ I3 v ; ...
       v' 0 ] ;     % costruzione matrice
d = P0 - r0 ;       % differenza punto-partenza retta
b = [ d ; 0 ] ;     % vettore termini noti
x = M\b ;           % soluzione mediante backslash
d_ortho = x(1:3) ; % vettore ortogonale = prime 3 incognite
dist_C  = norm( d_ortho )
```

- Che fornisce il risultato corretto `dist_C = 1.4142`.

- Metodo D (Pitagora): si fa il prodotto scalare

$$\mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = \mathbf{d}\cdot\mathbf{d_v} + \mathbf{d}\cdot\mathbf{d}_\perp = (\mathbf{d}\cdot\mathbf{e_v})^2 + dist^2$$

$$dist = \sqrt{\mathbf{d}\cdot\mathbf{d} - (\mathbf{d}\cdot\mathbf{e_v})^2}$$

con $\mathbf{e_v} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ il vettore di lunghezza unitaria in direzione $\mathbf{v}$.

```
% Metodo D
d    = P0 - r0 ;        % differenza punto-partenza retta
dd   = dot(d, d) ;      % ipotenusa^2
e_v = v / norm(v) ;    % vettore unitario lungo v
L_v = dot(d, e_v)^2 ; % cateto^2 lungo v
dist_D = sqrt( dd - L_v )
```

- Che fornisce il risultato:

```
dist_D =
       1.4142
```

- Calcolare la distanza tra un punto $\mathbf{P}_0$ nello spazio ed un piano q nella forma esplicita

$$\mathbf{q}(\lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{q}_0 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{q}_0 + [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2] \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}$$

- Metodo A (ortogonalità): si impone $\mathbf{P}_0 - \mathbf{q}(\lambda_1, \lambda_2)$ ortogonale al piano:

$$\mathbf{v}_i \cdot \big(\mathbf{P}_0 - \mathbf{q}(\lambda_1, \lambda_2)\big) = 0 \qquad i = 1, 2$$

$$\mathbf{V}^T \big(\mathbf{P}_0 - \mathbf{q}_0 - \mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}\big) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}^T \mathbf{V}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{V}^T (\mathbf{P}_0 - \mathbf{q}_0)$$

$$dist = \|\mathbf{P}_0 - \mathbf{q}(\lambda_1, \lambda_2)\|$$

```
% Valori particolari
P0 = [ 3 ; 3 ; 5 ] ; % punto

q0 = [ 0 ; 4 ; 2 ] ; % piano, punto di partenza
v1 = [ 1 ; 3 ; 0 ] ; % piano, primo vettore direzione
v2 = [ 0 ; 2 ; 5 ] ; % piano, secondo vettore direzione

V = [ v1 v2 ] ;                % matrice V = [ v1 v2 ]
q = @(lambda) q0 + V*lambda ; % funzione piano

% Metodo A
A = V' * V ;         % matrice quadrata dei coefficienti
b = V' * (P0-q0) ; % vettore dei termini noti
lambda = A\b ;       % soluzione, lambda
dist_A = norm( P0 - q(lambda) )
```

- Metodo B (prodotto vettoriale): si calcola il prodotto vettoriale

$$\mathbf{c} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_{1,x} & v_{1,y} & v_{1,z} \\ v_{2,x} & v_{2,y} & v_{2,z} \end{bmatrix}$$

e lo si normalizza mediante $\mathbf{e_c} = \mathbf{c}/\|\mathbf{c}\|$. Il prodotto vettoriale $\mathbf{c}$ è quindi ortogonale al piano, essendo ortogonale sia a $\mathbf{v}_1$ che a $\mathbf{v}_2$.
La distanza cercata è quindi data dalla componente di $\mathbf{P}_0 - \mathbf{q}_0$ lungo $\mathbf{e_c}$, senza segno:

$$dist = |(\mathbf{P}_0 - \mathbf{q}_0) \cdot \mathbf{e_c}|$$

```
% Metodo B
c   = cross( v1 , v2 ) ; % prodotto vettoriale, vettore ortognale al piano
e_c = c / norm( c ) ;    % normalizzazione (lunghezza unitaria)
dist_B = abs( dot(P0-q0, e_c) )
```

- Dall'esecuzione dei precedenti script si ottiene:

```
dist_A =
       3.5138

dist_B =
       3.5138
```

- Scrivere una funzione che, dato il piano q (nello spazio) nella forma

$$\mathbf{q}(\lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{q}_0 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2,$$

  ne determini i coefficienti della forma canonica

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z + d = \mathbf{c} \cdot \mathbf{q} + d = 0$$

- Il piano nella forma canonica può essere scritto come prodotto scalare

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -\mathbf{c} \cdot \mathbf{q}_0$$

- Il vettore $\mathbf{c}$ è ortogonale a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{c} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$$

piano_canonico.m

```
% Input: q0, vettore colonna 3x1 di un punto nel piano
%        v1 e v2, vettori colonna 3x1 delle direzioni lungo il piano
% Output: c, vettore colonna 3x1 dei coefficienti della forma canonica
%         d, costante della forma canonica
function [ c , d ] = piano_canonico(q0, v1, v2)
  c = cross(v1, v2) ;
  d = -dot(c, q0) ;
end
```

- Scrivere una funzione che, dato il piano q (nello spazio) in forma canonica

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z + d = \mathbf{c} \cdot \mathbf{q} + d = 0$$

  ne determini una particolare forma esplicita del tipo

$$\mathbf{q}(\lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{q}_0 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2,$$

- Si determineranno i due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ in maniera che siano entrambi ortogonali a $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{v}_1 = 0\,, \quad \mathbf{c}^T \mathbf{v}_2 = 0$$

- Pensando a $\mathbf{c}^T$ come ad una matrice dei coefficienti di dimensione 1×3, $\mathbf{N} = \ker(\mathbf{c}^T)$ sarà una matrice 3×2 le cui 2 colonne $\mathbf{n}_j$ saranno tali che $\mathbf{c}^T \mathbf{n}_j = \mathbf{0}$, ossia proprio i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ cercati.
- Imponiamo poi che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ siano ortogonali tra di loro, cioè $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, e che siano *normalizzati*, cioè di lunghezza unitaria $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = 1$.
- Dalla forma del termine costante $d = -\mathbf{c}^T \mathbf{q}_0$ possiamo ricavare un particolare vettore $\mathbf{q}_0$ pensando ancora $\mathbf{c}^T$ come una matrice 1×3 dei coefficienti.

```
% Input: c, vettore colonna 3x1 dei coefficienti della forma canonica
%        d, costante della forma canonica
% Output: q0, vettore colonna 3x1 di un punto nel piano
%         v1 e v2, vettori colonna 3x1 delle direzioni lungo il piano
function [ q0 , v1 , v2 ] = piano_esplicito(c, d)
  N  = null( c' ) ; % ker( c^T )
  v1 = N(:,1) ;     % prima colonna di N
  v2 = N(:,2) ;     % seconda colonna di N
  q0 = -c' \ d ;    % un generico punto del piano
end
```

- Si può verificare la correttezza delle due precedenti funzioni per la conversione della forma del piano:

```
>> c = [ 1 ; 1 ; 1 ] ;
>> d = 1 ;
>> [q0,v1,v2] = piano_esplicito(c,d);
>> [c,d] = piano_canonico(q0,v1,v2)
c =
   0.5774
   0.5774
   0.5774

d =
   0.5774
```

```
>> q0 = [ 1 ; 2 ; 3 ] ;
>> v1 = [ 1 ; 0 ; 0 ] ;
>> v2 = [ 0 ; 1 ; 0 ] ;
>> [c,d] = piano_canonico(q0,v1,v2);
>> [q0,v1,v2] = piano_esplicito(c,d)
q0 =
    0
    0
    3
v1 =
    0
    1
    0
v2 =
   -1
    0
    0
```

- Dato un piano q (nello spazio) in forma canonica

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{q} + d = 0$$

la distanza di un generico punto $\mathbf{P}_0$ da esso è data da

$$dist = \left| \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} \cdot (\mathbf{P}_0 - \mathbf{q}_0) \right| \quad \Rightarrow \quad dist = \frac{|\mathbf{c} \cdot \mathbf{P}_0 + d|}{\|\mathbf{c}\|}$$

dove $\mathbf{q}_0$ è un qualsiasi punto del piano.

- Scrivere una funzione per il calcolo della distanza di un punto da un piano espresso in forma canonica, e verificare che la distanza calcolata con la forma esplicita (`Parte3_Es2.m`) del piano coincida per un caso particolare.

`distanza_punto_piano_canonico.m`

```
% Input: P0, vettore colonna 3x1 del punto nello spazio
%        c, vettore colonna 3x1 dei coefficienti della forma canonica
%        d, costante della forma canonica
% Output: dist, distanza di P0 dal piano
function dist = distanza_punto_piano_canonico(P0, c, d)
  norm_c = norm( c ) ;
  piano  = dot( c , P0 ) + d ;
  dist   = abs( piano ) / norm_c ;
end
```

distanza_punto_piano_esplicito.m

```
% Input: P0, vettore colonna 3x1 del punto nello spazio
%        q0, vettore colonna 3x1 di un punto nel piano
%        v1 e v2, vettori colonna 3x1 delle direzioni lungo il piano
% Output: dist, distanza di P0 dal piano, (Metodo A)
function dist = distanza_punto_piano_esplicito(P0, q0, v1, v2)
  V = [ v1 v2 ] ;
  q = @(lambda) q0 + V*lambda ; % funzione piano
  A = V' * V ;          % matrice quadrata dei coefficienti
  b = V' * (P0-q0) ; % vettore dei termini noti
  lambda = A\b ;        % soluzione, lambda
  dist   = norm( P0 - q(lambda) ) ;
end
```

- Verifica in un caso particolare:

```
P0 = [ 1 ; 2 ; 3 ] ; % punto nello spazio
c  = [ 1 ; 1 ; 1 ] ; % vettore coefficienti della forma canonica
d  = 1 ;             % vettore termine costante della forma canonica

% Distanza punto-piano in forma canonica
dist_canonico = distanza_punto_piano_canonico(P0, c, d)

% Distanza punto-piano in forma esplicita
[ q0 , v1 , v2 ] = piano_esplicito(c, d) ;
dist_esplicito = distanza_punto_piano_esplicito(P0, q0, v1, v2)
```

```
dist_canonico =
     4.0415

dist_esplicito =
     4.0415
```

- Scrivere una funzione che, data una retta r nello spazio espressa nella forma esplicita
$$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{v},$$
ne determini una forma implicita come intersezione di due piani espressi in forma canonica:
$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{r} + d_1 = 0 \\ \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{r} + d_2 = 0 \end{cases}$$
- Si avrà sempre
$$\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{v} = 0\,, \quad \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{v} = 0$$
e quindi $\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_2$ si potranno nuovamente ottenere dal $\ker(\mathbf{v}^T)$. Le costanti d_1 e d_2 si possono poi ottenere sostituendo la forma esplicita della retta nel sistema in forma canonica, ottenendo:
$$d_1 = -\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{r}_0\,, \quad d_2 = -\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{r}_0$$

retta_canonica.m

```
% Input: r0, vettore colonna 3x1 di un punto della retta
%        v, vettore colonna 3x1 della direzione della retta
% Output: c1,c2,d1,d2 coefficienti e termini costanti della forma canonica
function [ c1 , c2 , d1 , d2 ] = retta_canonica(r0, v)
  N  = null( v' ) ;
  c1 = N(:,1) ;
  c2 = N(:,2) ;
  d1 = -dot(c1, r0) ;
  d2 = -dot(c2, r0) ;
end
```

- Scrivere una funzione che, data una retta r nello spazio espressa in forma implicita come intersezione di due piani espressi in forma canonica:

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{r} + d_1 = 0 \\ \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{r} + d_2 = 0, \end{cases}$$

ne determini una forma esplicita del tipo

$$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{v},$$

- Metodo A (prodotto vettoriale): si calcola direttamente il vettore $\mathbf{v}$ mediante prodotto vettoriale $\mathbf{v} = \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2$, mentre un punto $\mathbf{r}_0$ della retta è dato da una soluzione particolare del sistema canonico

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{r}_0 = - \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

poichè $\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{v} = 0$:

retta_esplicita_A.m

```
% Input: c1,c2,d1,d2 coefficienti e termini costanti della forma canonica
% Output: r0, vettore colonna 3x1 di un punto della retta
%         v, vettore colonna 3x1 della direzione della retta
function [ r0 , v ] = retta_esplicita_A(c1, c2, d1, d2)
  v  = cross(c1, c2) ;
  r0 = -[ c1' ; c2' ] \ [ d1 ; d2 ] ;
end
```

- Metodo B (soluzione diretta): si calcola nuovamente $\mathbf{r}_0$ come soluzione particolare del sistema canonico, mentre il vettore $\mathbf{v}$ sarà dato dal ker della matrice 2×3 dei coefficienti:

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{r} + d_1 = 0 \\ \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{r} + d_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{r} = - \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

retta_esplicita_B.m

```
% Input: c1,c2,d1,d2 coefficienti e termini costanti della forma canonica
% Output: r0, vettore colonna 3x1 di un punto della retta
%         v, vettore colonna 3x1 della direzione della retta
function [ r0 , v ] = retta_esplicita_B(c1, c2, d1, d2)
  A  = [ c1' ; c2' ] ;
  b  = [ d1  ; d2  ] ;
  r0 = -A \ b ;
  v  = null( A ) ;
end
```

- Utilizzo:

```
r0 = [ 1 ; 2 ; 3 ] ;
v  = [ 0 ; 0 ; 5 ] ;
[c1,c2,d1,d2]=retta_canonica(r0,v);
[r0,v]=retta_esplicita_A(c1,c2,d1,d2)
```

```
r0 =
    1   ;   2   ;   0
v =
    0   ;   0   ;   1
```

```
[r0,v]=retta_esplicita_B(c1,c2,d1,d2)
```

```
r0 =
    1   ;   2   ;   0
v =
    0   ;   0   ;   1
```

- Scrivere una funzione che, dato un piano q ed una retta r ed nello spazio espressi in forma esplicita:

$$\mathbf{q}(\lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{q}_0 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$$
$$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{v},$$

  determini il punto d'intersezione, nell'ipotesi che esista ($\mathbf{v} \neq \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$).
- Metodo A (diretto): si eguaglia direttamente la retta r con il piano q, assumendo come incognite i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$:

$$\mathbf{q}_0 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & -\mathbf{v} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda \end{Bmatrix} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{q}_0$$

  che una volta risolto permette di calcolare indirettamente il punto d'intersezione utilizzando l'equazione esplicita della retta, per esempio:

`intersezione_piano_retta_espliciti_A.m`

```
% Input: q0, v1, v2, vettori 3x1 del piano
%        r0, v, vettori 3x1 della retta
% Output: x, vettore 3x1 dell'intersezione
function x = intersezione_piano_retta_espliciti_A(q0, v1, v2, r0, v)
  A = [ v1 v2 -v ] ;
  z = A \ ( r0 - q0 ) ;
  x = r0 + z(3) * v ;
end
```

- Metodo B (forma canonica): si trasformano in forma canonica sia il piano che la retta, pervenendo al seguente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + d = 0 \\ \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{x} + d_1 = 0 \\ \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{x} + d_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{x} = - \begin{Bmatrix} d \\ d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

che una volta risolto fornisce direttamente il punto d'intersezione:

intersezione_piano_retta_espliciti_B.m

```
% Input: q0, v1, v2, vettori 3x1 del piano
%        r0, v, vettori 3x1 della retta
% Output: x, vettore 3x1 dell'intersezione
function x = intersezione_piano_retta_espliciti_B(q0, v1, v2, r0, v)
  [ c , d ] = piano_canonico(q0, v1, v2) ;
  [ c1 , c2 , d1 , d2 ] = retta_canonica(r0, v) ;
  A = [ c' ; c1' ; c2' ] ;
  b = [ d  ; d1  ; d2  ] ;
  x = -A \ b ;
end
```

- *Regressione lineare.* Data una serie di n valori x_i della variabile indipendente in corrispondenza dei quali sono dati n valori $\bar{y}_i$ della variabile dipendente, ad esempio delle misurazioni, ci si pone il problema di determinare la retta $y = c_1 + c_2 x$ che "meglio" approssima i dati forniti.
- Soluzione ai minimi quadrati: c_1 e c_2 si determinano minimizzando la somma dei quadrati degli scarti:

$$\min_{c_1,c_2\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \min_{c_1,c_2\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \Big((c_1 + c_2 x_i) - \bar{y}_i \Big)^2$$

- Organizzando i dati nei vettori colonna $\mathbf{x} = (x_i)$ e $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_i)$, il vettore colonna degli scarti è

$$\boldsymbol{\delta} = (c_1 + c_2\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{c} - \bar{\mathbf{y}}$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}$$

- Il problema si può quindi risolvere calcolando la soluzione ai minimi quadrati del sistema lineare sovradeterminato $\mathbf{A}\mathbf{c} = \bar{\mathbf{y}}$, dove la matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$ ha dimensione $n \times 2$.

- Implementare la soluzione ai minimi quadrati per la regressione lineare, utilizzando la seguente funzione che fornisce i valori $\bar{y}_i$ delle misure:

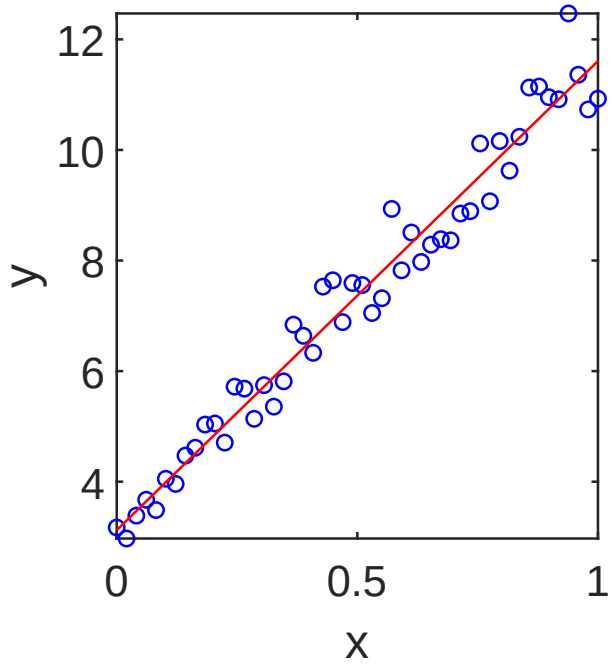
misura_con_rumore.m

```
% Input: x, vettore dei valori della variabile indipendente
%        c1, c2, coefficienti della retta
%        r, peso del rumore
% Output: y, vettore dei valori della variabile dipendente nella forma
%             y = c1 + c2*x + rumore
function y = misura_con_rumore(x, c1, c2, r)
  y = c1 + c2 * x ;
  rumore = rand(size(x)) - .5 ;
  y = y + r * rumore .* y ;
end
```

```
% Numero di valori
n = 50 ;

% Valori variabile indipendente
x = linspace(0, 1, n)' ;

% Valori variabile dipendente, misura
c1 = 3.0 ;
c2 = 9.0 ;
r  = 0.1 ;
y  = misura_con_rumore(x, c1, c2, r) ;

% Minimi quadrati
A = [ ones(n,1) x ] ;
c = A\y ;
```

- Possiamo poi visualizzare i risultati mediante plot ed output testuale:

```
% Plot
plot( x , y , 'ob' ) ;              % dati
hold on ;
plot( x , c(1)+c(2)*x , '-r' ) ; % retta di regressione

% Output testuale dei coefficienti
testo = [ 'Regressione lineare di %d valori:\n'  ...
          ' c      = (%.2f,%.2f)\n' ...
          ' c_regr = (%.2f,%.2f)\n' ] ;
fprintf(testo, n,          ...
                c1   , c2 , ...
                c(1), c(2) ) ;
```



- L'output testuale che si ottiene nella command window è

```
Regressione lineare di 50 valori:
 c      = (3.00,9.00)
 c_regr = (2.96,9.06)
```

- *Eliminazione di Gauss.* Data una matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ di dimensione $m \times n$, si eseguono successive operazioni lineari sulle righe, in particolare lo scambio di due righe R_i ed R_k e la somma ad una riga R_i del multiplo di un'altra riga R_k:

$$R_i \leftrightarrows R_k$$

$$R_i \leftarrow R_i + \lambda R_k$$

  in maniera tale da ottenere una matrice *triangolare superiore*.
- Scrivere una funzione che, data una matrice $\mathbf{A}$, restituisca la relativa matrice triangolare superiore ottenuta effettuando l'eliminazione di Gauss, scrivendo come output testuale la serie di operazioni eseguite, ad esempio:

  `R2` $\leftrightarrows$ `R1`

  `R2` $\leftarrow$ `R2-5`$\times$`R1`

  seguite dal risultato dell'operazione nella matrice.
- Si deve prevedere il caso di un elemento *pivot* nullo, che verrà sostituito con un altro elemento pivot non nullo, se esiste.

- Conviene raggruppare le operazioni da effettuare sulle righe in apposite funzioni definite all'interno della funzione principale.
- Sottofunzione per lo scambio di due righe `i1` e `i2`:

```
function M = scambia_righe( M , i1 , i2 )
  M( [i1;i2] , : ) =  M( [i2;i1] , : ) ; % scambio righe
  fprintf('R%d ⇆ R%d\n', i1, i2) ;       % output testuale dell'operazione
  disp( M ) ;                            % output della matrice
end
```

- Sottofunzione per l'operazione $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_k$:

```
function M = somma_righe( M , i , lambda , k )
  M( i , : ) =  M( i , : ) + lambda * M( k , : ) ; % somma righe
  fprintf('R%d ← R%d%+.2f×R%d\n', i, i, lambda, k) ; % output testuale
  disp( M ) ; % output della matrice
end
```

- Sottofunzione per l'operazione di scambio del pivot:

```
function M = scambio_pivot( M , j )
  possibili_pivot = M( (j+1):end , j ) ;       % estrazione colonna j
  [ ~ , k ] = max( abs( possibili_pivot ) ) ; % ricerca pivot "migliore"
  M = scambia_righe( M , j , j+k ) ;           % scambio righe pivot
end
```

- Funzione principale:

eliminazione_Gauss.m

```
function A = eliminazione_Gauss( A )
  ...
  ( sottofunzioni per le operazioni sulle righe )
  ...
  % Funzione per il test x = 0
  is_zero = @(x) abs(x) < 10*eps ;

  m = size(A, 1) ;
  % Ciclo sulle colonne da ridurre a 0
  for j = 1 : m-1
    pivot = A( j , j ) ; % il pivot è l'elemento diagonale

    % Caso di pivot nullo => nuovo pivot (se possibile)
    if is_zero( pivot )
      A = scambio_pivot( A , j ) ;
      pivot = A( j , j ) ;
    end

    % Ciclo sugli elementi da eliminare nella colonna j
    for i = j+1 : m
      lambda = -A(i,j) / pivot ; % coefficiente scalare per l'eliminazione
      if ~is_zero( lambda )      % se lambda = 0 l'eliminazione non serve
        A = somma_righe( A , i , lambda , j ) ; % operazione somma righe
      end
    end
  end

end
```

- *Sostituzione all'indietro.* Data la matrice triangolare superiore $\mathbf{T}$ ed il vettore dei termini noti ridotti $\mathbf{f}$ ottenuti operando l'eliminazione di Gauss sulla matrice $\mathbf{A}$ e sul vettore dei termini noti $\mathbf{b}$, la soluzione $\mathbf{x}$ del sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

con $\mathbf{A}$ matrice quadrata $m \times m$, si può ottenere operando successive sostituzioni all'indietro utilizzando $\mathbf{T}$ ed $\mathbf{f}$, determinando quindi le incognite $x_m, \ldots, x_1$ dall'ultima alla prima.
- Scrivere una funzione che, data una matrice triangolare superiore $\mathbf{T}$ ed il vettore dei termini noti ridotto $\mathbf{f}$, restituisca la soluzione $\mathbf{x}$.

sostituzione.m

```
% Input: T, matrice m x m triangolare superiore quadrata
%        f, matrice m x k dei termini noti ridotti
% Output: f, matrice m x k, soluzione
function f = sostituzione( T , f )
  m = size(T, 1) ;
  % Ciclo sugli m valori incogniti da determinare, all'indietro
  for i = m : -1 : 1
    jx  = (i+1) : m   ; % indici dei termini incogniti già risolti
    v_T = T( i , jx ) ; % corrispondenti termini di T per l'incognita i
    v_f = f( jx , : ) ; % termini incogniti già risolti
    f( i , : ) = ( f( i , : ) - v_T * v_f ) / T( i , i ) ;
  end
end
```

- Utilizzo, **b** vettore:

```
% Matrice e termine noto particolari
A = [ 0 1 2 ; 4 5 6 ; 7 7 8 ] ;
b = [ 1 ; 1 ; 3 ] ;

% Eliminazione di Gauss su concatenazione di A e b
Tf = eliminazione_Gauss( [ A b ] ) ;
T  = Tf(:,1:3) ; % estrazione matrice triang. sup. T
f  = Tf(:,  4) ; % estrazione termini noti ridotti f

% Sostituzione all'indietro
x = sostituzione( T , f ) ;

% Verifica
A*x - b ;
```

```
R1 ⇆ R2
  4     5     6     1
  0     1     2     1
  7     7     8     3

R3 ← R3-1.75×R1
  4.0000    5.0000    6.0000    1.0000
       0    1.0000    2.0000    1.0000
       0   -1.7500   -2.5000    1.2500

R3 ← R3+1.75×R2
  4     5     6     1
  0     1     2     1
  0     0     1     3
```

(Parte3_Es10)

- Utilizzo, **b** matrice identità per determinare l'inversa di **A**:

```
% Matrice identità
b = eye(3,3) ;

% Eliminazione di Gauss su concatenazione di A e b
Tf = eliminazione_Gauss( [ A b ] ) ;
T  = Tf(:,1:3) ; % estrazione matrice triang. sup. T
f  = Tf(:,4:6) ; % estrazione termini noti ridotti f

% Sostituzione all'indietro
inv_A = sostituzione( T , f ) ;

% Verifica
A * inv_A ;
```

```
R1 ⇆ R2
  4     5     6     0     1     0
  0     1     2     1     0     0
  7     7     8     0     0     1

R3 ← R3-1.75×R1
  4.0000    5.0000    6.0000         0    1.0000         0
       0    1.0000    2.0000    1.0000         0         0
       0   -1.7500   -2.5000         0   -1.7500    1.0000

R3 ← R3+1.75×R2
  4.0000    5.0000    6.0000         0    1.0000         0
       0    1.0000    2.0000    1.0000         0         0
       0         0    1.0000    1.7500   -1.7500    1.0000
```

- Oltre alle funzioni già viste:
  - `norm(v)` per la norma 2 di vettori (e matrici) $\|\mathbf{v}\|$,
  - `dot(a,b)` per il prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$,
  - `cross(a,b)` per il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$,
  - `null(A)` per il ker, o spazio nullo $\ker(\mathbf{A})$,

  vi sono altre funzioni particolarmente utili per l'algebra lineare: vediamone alcune.
- `det(A)` per calcolare il determinante di una matrice quadrata `A`;
- `inv(A)` per calcolare l'inversa di una matrice quadrata invertibile `A`;
- `rank(A)` per calcolare il rango di una matrice `A`;
- `R=orth(A)` per calcolare una base ortonormale del range di `A`: `R` ha lo stesso numero di righe di `A` ed un numero di colonne pari al rango di `A`, `rank(A)`; ogni colonna è un vettore della base ortonormale;
- `[V,D]=eig(A)` per calcolare autovettori (colonne di `V`) ed autovalori (elementi diagonali di `D`) di una matrice quadrata `A`. Se l'argomento richiesto in uscita alla funzione è unico, `d=eig(A)`, gli autovalori sono disposti in un vettore colonna, `d`.

- Verificare direttamente le seguenti proprietà del determinante:

Operazione	Funzione	Effetto sul det
$R_i \leftrightarrows R_k$	`scambia_righe(A,i,k)`	$\det(\mathbf{A}) \to -\det(\mathbf{A})$
$R_i \leftarrow \lambda R_i$	`moltiplica_riga(A,i,l)`	$\det(\mathbf{A}) \to \lambda \det(\mathbf{A})$
$R_i \leftarrow R_i + \lambda R_k$	`somma_righe(A,i,l,k)`	$\det(\mathbf{A}) \to \det(\mathbf{A})$

in un caso particolare. Verificare inoltre in questo caso particolare che il determinante di una matrice triangolare superiore è pari al prodotto dei termini diagonali.

```
det_int = @(A) round(det(A)) ;

n = 3 ;
A = round( 10*rand(n,n) ) ;

% Scambio righe
fprintf( 'det_A = %d\n' , det_int(A) ) ;
A_mod = scambia_righe( A , 1 , 2 ) ;
fprintf( 'det_A dopo scambio righe = %d\n\n' , det_int(A_mod) ) ;

% Moltiplicazione riga
fprintf( 'det_A = %d\n' , det_int(A) ) ;
A_mod = moltiplica_riga( A , 1 , 10 ) ;
fprintf( 'det_A dopo moltiplicazione riga = %d\n\n' , det_int(A_mod) ) ;

% Somma di riga con multiplo di altra riga
fprintf( 'det_A = %d\n' , det_int(A) ) ;
A_mod = somma_righe( A , 1 , 10 , 2 ) ;
fprintf( 'det_A dopo somma multiplo riga = %d\n\n' , det_int(A_mod) ) ;
```

(Parte3_Es11)

```
det_A = 134
R1 ⇆ R2
     2      2      8
     5      8      0
     3      1      3
det_A dopo scambio righe = -134

det_A = 134
R1 ← 10.00×R1
    50     80      0
     2      2      8
     3      1      3
det_A dopo moltiplicazione riga = 1340

det_A = 134
R1 ← R1+10.00×R2
    25     28     80
     2      2      8
     3      1      3
det_A dopo somma multiplo riga = 134
```

```
% Eliminazione Gauss
fprintf( 'det_A = %d\n' , det_int(A) ) ;
A_mod = eliminazione_Gauss( A ) ;
fprintf( 'det_A dopo Gauss = %d\n' , det_int(A_mod) ) ;
prodotto_diagonale = prod( diag( A_mod ) ) ;
fprintf( 'Prodotto termini diagonali = %d\n' , round(prodotto_diagonale) ) ;
```

- Verificare in un caso particolare le seguenti proprietà per una matrice quadrata $\mathbf{A}$ di dimensione $n \times n$:

  P1. $\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$, dove λ_i sono gli autovalori di $\mathbf{A}$
  P2. $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A})^{-1}$
  P3. gli autovalori di $\mathbf{A}^{-1}$ valgono λ_i^{-1}

  generando un output testuale per ogni proprietà.

```
n = 3 ;
A = rand(n,n) ;
err = 100*eps ;

% Determinante ed autovalori di A
det_A  = det( A ) ;
lambda = sort( eig( A ) ) ;

% P1
prod_autovalori = prod( lambda ) ;
P1 = abs( det_A - prod_autovalori ) < abs(det_A)*err ;
fprintf( 'P1: det(A) = prodotto autovalori? %s\n' , si_no(P1) ) ;

% P2
inv_A = inv( A ) ;
det_i = det( inv_A ) ;
P2 = abs( det_i - 1/det_A ) < abs(det_i)*err ;
fprintf( 'P2: det(inv(A)) = 1/det(A)? %s\n' , si_no(P2) ) ;

% P3
lambda_i = sort( 1 ./ eig( inv_A ) ) ;
P3 = abs( 1 - lambda ./ lambda_i ) < err ;
fprintf( 'P3: autovalori(inv(A)) = 1/autovalori(A)? %s\n', si_no(all(P3))) ;
```

- Scrivere una funzione che verifichi la continuità di una funzione $f(x)$ in un punto $x = x_0$.
- Sarebbe sufficiente verificare che il limite destro sia uguale al limite sinistro

$$f^+ = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f^-$$

utilizzando la funzione `limite` scritta precedentemente. Tuttavia bisognerebbe fare attenzione a che valore iniziale impiegare per `delta` (basti pensare a $f(x) = H(x)$, funzione scalino, per $x_0 \neq 0$ molto vicino a 0).
- Scriviamo la funzione che effettua direttamente il controllo tra limite destro e sinistro:

`is_continua.m`

```
% Input: f, function handle alla funzione f
%        x0, valore di x dove si vuole controllare la continuità
% Output: b, booleano: vero se f è continua in x0, falso altrimenti
function b = is_continua( f , x0 )
  h = 0.1 ;
  salto_tollerato_y = 1e-8 ;                % salto funzione
  salto_tollerato_x = abs(x0) * 10 * eps ; % salto incremento in x = h
  while abs( f(x0+h)-f(x0-h) ) > salto_tollerato_y && h > salto_tollerato_x
    h = h / 2 ;
  end
  b = h > salto_tollerato_x ;
end
```

- Scrivere una funzione che verifichi la derivabilità di una funzione $f(x)$ in un punto $x = x_0$.
- In questo caso è sufficiente verificare che la derivata destra sia uguale alla derivata sinistra

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

  utilizzando la funzione `limite` scritta precedentemente.
- La derivabilità implica continuità.
- Scriviamo la funzione che effettua direttamente il controllo tra limite destro e sinistro:

is_derivabile.m

```
% Input: f, function handle alla funzione f
%        x0, valore x dove si vuole controllare la continuità della derivata
% Output: b, booleano: vero se f' è continua in x0, falso altrimenti
function b = is_derivabile( f , x0 )
  df_dx = @(h) ( f(x0+h)-f(x0) ) / h ;
  df_dx_sx = limite( df_dx , 0 , -.1 , 1e-6 , true ) ;
  df_dx_dx = limite( df_dx , 0 , +.1 , 1e-6 , true ) ;
  salto_tollerato_df_dx = 1e-5 ;
  b = abs( df_dx_sx - df_dx_dx ) < salto_tollerato_df_dx ;
end
```

- *Ricerca delle discontinuità.* Data una funzione $f(x)$, si potrebbero determinare i valori di x per i quali f è discontinua andando a fare una verifica sul modulo della derivata approssimata:

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right| > M \quad \Rightarrow \quad f \text{ discontinua in } x_0$$

  per M sufficientemente grande. In questo modo, però, qualsiasi funzione troppo pendente, cioè con $|f'| > M$, sarebbe classificata come discontinua ovunque. Ad esempio $f(x) = 2Mx$.

- Possiamo migliorare la bontà della condizione da verificare utilizzando la derivata della derivata (la velocità con cui varia la derivata), approssimata:

$$\left|\frac{f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)}{h^2}\right| > M \quad \Rightarrow \quad f \text{ discontinua in } x_0$$

- Anche quest'ultima condizione non è definitiva e può comportare problemi per funzioni con grande curvatura $|f''| > M$, ad esempio $f(x) = Mx^2$, ma ci possiamo accontentare.

- Scrivere una funzione che determini un'approssimazione dei punti di discontinuità di una data funzione `f` entro un dato intervallo `ab`, utilizzando la condizione di verifica appena vista.
- Operiamo in maniera analoga a quanto fatto nella ricerca approssimata degli zeri di una funzione mediante la ricerca del cambio del segno:

trova_discontinuita.m

```
% Input: f, function handle alla funzione f
%        ab, vettore [ a b ] dell'intervallo entro al quale lavorare
% Output: xd, matrice 2 x N, N = numero di punti di discontinuità
%             Ogni colonna di xd è un intervallo che racchiude un punto di
%             discontinuità
function xd = trova_discontinuita( f , ab )
  dx  = 1e-3 ;
  x   = ab(1) : dx : ab(2) ;
  f_x = f( x ) ;
  ddf = ( f_x(1:end-2) - 2*f_x(2:end-1) + f_x(3:end) ) / (dx^2) ;
  M   = 1e3 ;
  ix  = find( abs(ddf) > M ) ;
  xd  = x(ix+1) ;
  xd  = reshape( xd , 2 , length(xd) / 2 ) ;
end
```

- Utilizzo pratico: si procede in maniera analoga a quanto fatto per la ricerca degli zeri della derivata, ossia determinando prima un'approssimazione dei punti ricercati ed andando poi ad effettuare un calcolo più preciso, punto per punto.
- L'ultima parte viene eseguita cercando gli zeri della funzione

$$g(x) = f(x) - \frac{f^+ + f^-}{2}$$

con il `metodo_bisezione`, implementato sotto forma di funzione.

`Main_A.m`

```
% Main A: discontinuità funzione
% funzione Heaviside
f = @heaviside_f ;

% Approssimazione iniziale
x_ab = trova_discontinuita( f , [-1 1] ) ;
n_discontinuita = size( x_ab , 2 ) ;
x_discontinuita = zeros(1, n_discontinuita) ;

% Calcolo più accurato punto per punto
for i = 1 : n_discontinuita
  ab    = x_ab(:,i) ;
  f_ab  = f( ab ) ;
  f_mid = sum( f_ab ) / 2 ;
  g = @(x) f(x) - f_mid ;
  tol_x = 1e-10 ;
  x_discontinuita(i) = metodo_bisezione(g, ab, tol_x) ;
end
```

- *Integrali definiti.* L'integrale di una funzione $f(x)$ su un intervallo $[a, b]$ si può approssimare in termini pratici come

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)$$

dove l'intervallo $[a, b]$ viene suddiviso in n intervalli $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ di uguale lunghezza $\Delta x = x_i - x_{i-1} = (b-a)/n$, $i = 1, \ldots, n$. I punti $\bar{x}_i$ possono essere scelti in maniera arbitraria dentro ai relativi intervalli I_i, $\bar{x}_i \in I_i$. Ad esempio si può scegliere

S1. $\bar{x}_i = x_{i-1}$ (estremo sinistro);
S2. $\bar{x}_i = x_i$ (estremo destro);
S3. $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$ (punto medio);
S4. $\bar{x}_i = (1-\alpha)x_{i-1} + \alpha x_i$, $\alpha \in [0, 1]$, che comprende i precedenti punti. α può essere un numero random, ad esempio;
S5, S6. assegnare $\bar{x}_i$ pari ad uno dei due estremi in maniera tale da ottenere un'approssimazione della somma inferiore o superiore.

- Scrivere una funzione che prenda in input una funzione $f(x)$, un intervallo $[a, b]$, un intero n ed un intero che definisce una delle 6 possibili scelte per i punti $\bar{x}_i$ e calcoli la relativa approssimazione dell'integrale definito.

integrale_approx.m

```
function integr = integrale_approx( f , ab , n , S )
  x = linspace( ab(1) , ab(2) , n+1 ) ;
  x_sx = x(1:end-1) ;
  x_dx = x(2:end  ) ;
  switch S
    case 1 % estremo sx
      x_segnato = x_sx ;
    case 2 % estremo dx
      x_segnato = x_dx ;
    case 3 % punto medio
      x_segnato = ( x_sx + x_dx ) / 2 ;
    case 4 % punto parametrizzato
      alfa = rand( size(x_sx) ) ;
      x_segnato = alfa .* x_sx + (1-alfa) .* x_dx ;
    otherwise % somme inferiori o superiori
      f_x  = f( x ) ;
      f_sx = f_x(1:end-1) ;
      f_dx = f_x(2:end  ) ;
      if S == 5
        f_x_segnato = min( f_sx , f_dx ) ;
      else
        f_x_segnato = max( f_sx , f_dx ) ;
      end
  end
  if S <= 4
    f_x_segnato = f( x_segnato ) ;
  end
  dx = x(2) - x(1) ;
  integr = dx * sum( f_x_segnato ) ;
end
```

- *Formula dei trapezi.* L'integrale di una funzione $f(x)$ su un intervallo $[a, b]$ si può approssimare con l'area delle rette che passano per ogni coppia di punti successivi:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \Delta x \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} =$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\Big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big)$$

- *Formula di Simpson.* Lo stesso integrale si può approssimare con l'area delle parabole che passano per ogni terna di punti successivi. I punti devono quindi essere dispari (n pari):

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx 2\Delta x \sum_{i=1}^{n/2} \frac{f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})}{6} =$$

$$= \frac{\Delta x}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big)$$

- Scrivere una funzione che prenda in input una funzione $f(x)$, un intervallo $[a, b]$, un intero n ed un intero che definisce una delle 2 precedenti formule e calcoli la relativa approssimazione dell'integrale definito.

integrale_formula.m

```
function integr = integrale_formula( f , ab , n , formula )
  n = 2 * floor( n / 2 ) ;
  x = linspace( ab(1) , ab(2) , n+1 ) ;
  dx = x(2) - x(1) ;
  f_x = f( x ) ;
    switch formula
      case 1 % Trapezi
        estremi = f_x(1) + f_x(end) ;
        interni = 2 * sum( f_x(2:end-1) ) ;
        integr  = (dx/2) * ( estremi + interni ) ;
      case 2 % Simpson
        estremi = f_x(1) + f_x(end) ;
        interni_pari    = 4 * sum( f_x(2:2:end-1) ) ;
        interni_dispari = 2 * sum( f_x(3:2:end-2) ) ;
        integr  = (dx/3) * ( estremi + interni_pari + interni_dispari ) ;
  end
end
```

- Confrontiamo i risultati che otteniamo impiegando i metodi appena implementati con la funzione **integral** di MATLAB:

  `I = integral( f , a , b , opzioni )`

  che calcola numericamente l'integrale di **f** da **a** a **b** mediante formule di quadratura adattive. La tolleranza sul risultato **I** può essere definita in maniera assoluta o relativa mediante le **opzioni**:
  - tolleranza assoluta: `integral(f,a,b, 'AbsTol' , tol )` ;
  - tolleranza relativa: `integral(f,a,b, 'RelTol' , tol )` ;

Main_A.m

```
% Funzione non integrabile analiticamente
f = @(x) exp(-x .^ 2)
ab = [ 0 1 ] ;
n  = 1000 ;

I_med = integrale_approx( f , ab , n , 3 ) ; % punto medio
fprintf( 'Integrale, punto medio:     %.14e\n' , I_med ) ;

I_trap = integrale_formula( f , ab , n , 1 ) ; % trapezi
fprintf( 'Integrale, formula trapezi: %.14e\n' , I_trap ) ;

I_Simpson = integrale_formula( f , ab , n , 2 ) ; % Simpson
fprintf( 'Integrale, formula Simpson: %.14e\n' , I_Simpson ) ;

I_adapt = integral( f , ab(1) , ab(2) , 'RelTol' , 1e-15 ) ; % integral
fprintf( 'Integrale, MATLAB integral: %.14e\n' , I_adapt ) ;
```

```
f = function_handle with value:
     @(x)exp(-x.^2)

Integrale, punto medio:      7.46824163469049e-01
Integrale, formula trapezi: 7.46824071499184e-01
Integrale, formula Simpson: 7.46824132812435e-01
Integrale, MATLAB integral: 7.46824132812427e-01
```

```
f  = @(x) x .^ 2
ab = [ 0 3^(1/3) ] ;
n  = 1000 ;

I_sx = integrale_approx( f , ab , n , 1 ) ; % estremo sx
fprintf( 'Integrale, estremi sx:      errore = %+.2e\n' , I_sx-1 ) ;

I_dx = integrale_approx( f , ab , n , 2 ) ; % estremo dx
fprintf( 'Integrale, estremi dx:      errore = %+.2e\n' , I_dx-1 ) ;

I_med = integrale_approx( f , ab , n , 3 ) ; % punto medio
fprintf( 'Integrale, punto medio:     errore = %+.2e\n' , I_med-1 ) ;

I_inf = integrale_approx( f , ab , n , 5 ) ; % somma inferiore
fprintf( 'Integrale, somma inferiore: errore = %+.2e\n' , I_inf-1 ) ;

I_sup = integrale_approx( f , ab , n , 6 ) ; % somme superiori
fprintf( 'Integrale, somma superiore: errore = %+.2e\n' , I_sup-1 ) ;

I_trap = integrale_formula( f , ab , n , 1 ) ; % trapezi
fprintf( 'Integrale, formula trapezi: errore = %+.2e\n' , I_trap-1 ) ;

I_Simpson = integrale_formula( f , ab , n , 2 ) ; % Simpson
fprintf( 'Integrale, formula Simpson: errore = %+.2e\n' , I_Simpson-1 ) ;
```

- *Integrali impropri e cambio di variabile.* Con la funzione `integral` è possibile anche calcolare degli integrali impropri del tipo:

$$\lim_{b \to \bar{b}} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

dove un estremo di integrazione (o anche entrambi) può essere infinito ($\bar{b} = \pm\infty$) oppure essere punto singolare per f ($\bar{b} = c^-, c^+$).

- Esempio di integrale improprio di $f(x) = e^{-x^2}$ e cambio di variabile

$$x = \frac{t}{1-t} : [0,1] \to [0,+\infty) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

per trasformarlo in integrale sull'intervallo finito $[0,1]$:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{(1-t)^2}\mathrm{d}t$$

`Main_B.m`

```
f = @(x) exp( -x .^ 2) ;
I_improprio = integral( f , 0 , Inf ) ;
x_t    = @(t) t ./ (1-t) ;
dx_dt = @(t) (1-t) .^ (-2) ;
I_cambio = integral( @(t) f( x_t(t) ) .* dx_dt(t) , 0 , 1 ) ;
```

che forniscono entrambi il risultato corretto $0.886226925452758 \approx \sqrt{\pi}/2$.

- *Funzione integrale.* La funzione integrale

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

si può quindi implementare direttamente come funzione (anonima):

```
F = @(x0,x) integral( f , x0 , x ) ;
```

che però ha il difetto di non poter essere richiamata su ingressi `x` vettoriali poichè la funzione `integral` ammette solo valori scalari.

- Scriviamo una funzione per calcolare in maniera accurata la funzione integrale $F(x)$ usando `integral` per un vettore riga `x` di valori di x, sommando in maniera cumulativa gli integrali tra punti x successivi:

`F_integrale.m`

```
% Input: f, function handle della funzione da integrare
%        x0, primo estremo dell'integrazione, scalare
%        x, vettore riga del secondo estremo d'integrazione
% Output: F, funzione integrale valutata sui valori di x
function F = F_integrale( f , x0 , x )
  I = 0*x ;
  x = [ x0 sort( x ) ] ;
  for i = 1 : length(x)-1
    I(i) = integral( f , x(i) , x(i+1) ) ;
  end
  F = cumsum( I ) ;
end
```

- Scriviamo una funzione per calcolare la funzione integrale $F(x)$ usando però la formula di Simpson invece di `integral`, sommando in maniera cumulativa gli integrali tra i punti successivi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ del vettore colonna `x` di dimensione $n+1$, con n pari.
- L'integrale tra punti successivi dovrà sempre prendere in considerazione le parabole passanti per terne di punti successivi x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}, $i = 1, \ldots, n/2$, ma ci servirà calcolarne separatamente l'integrale tra i primi due punti della terna x_{2i-2}, x_{2i-1}, che si ottiene utilizzando i pesi $\frac{5}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{-1}{12}$, e l'integrale tra gli ultimi due punti della terna x_{2i-1}, x_{2i}, che si ottiene utilizzando i pesi $\frac{-1}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{5}{12}$:

F_integrale_Simpson.m

```
function [ x , F ] = F_integrale_Simpson( f , x0 , x_max , n )
  n = 2 * floor( n / 2 ) ;
  x = linspace( x0 , x_max , n+1 ) ;
  dx = x(2) - x(1) ;
  f_x = f( x ) ;          % vettore di f in tutti i punti
  p   = [ 5 8 -1 ] / 12 ; % pesi
  f1 = f_x(1:2:end-2) ;  % vettore di f nel primo   punto della terna
  f2 = f_x(2:2:end-1) ;  % vettore di f nel secondo punto della terna
  f3 = f_x(3:2:end  ) ;  % vettore di f nel terzo   punto della terna
  I_sx = p(1)*f1 + p(2)*f2 + p(3)*f3 ; % integrale prima   metà
  I_dx = p(3)*f1 + p(2)*f2 + p(1)*f3 ; % integrale seconda metà
  I = zeros( 1 , n ) ;
  I(1:2:end-1) = I_sx ;
  I(2:2:end  ) = I_dx ;
  F = [ 0 dx * cumsum( I ) ] ;
end
```

- Possiamo confrontare i due metodi, utilizzando anche il metodo dei trapezi che è già definito in MATLAB mediante la funzione `cumtrapz`:

  `F = cumtrapz( x , f_x )`

  che valuta $F(x)$ sul vettore `x` a partire dal vettore `f_x = f(x)`.

Main_C.m

```
f      = @cos ; % funzione f
F      = @sin ; % funzione integrale F, analitica
x0     = 0 ;
x_max  = 2*pi ;
err    = @(x,y) sqrt( mean( (x-y) .^ 2 ) ) ;

% MATLAB integral
n = 100 ;
x = linspace(x0, x_max, n) ;
F_int = F_integrale( f , x0 , x ) ;
err_int = err( F_int , F(x) ) ;
fprintf( 'MATLAB integral, n = %-8d, errore = %.2e\n' , n , err_int ) ;

% Metodo Simpson
n = 1000 ;
[ x , F_Simpson ] = F_integrale_Simpson( f , x0 , x_max , n ) ;
err_Simpson = err( F_Simpson , F(x) ) ;
fprintf( 'Metodo Simpson,  n = %-8d, errore = %.2e\n' , n , err_Simpson ) ;

% Metodo trapezi
n = 1000 ;
x = linspace(x0, x_max, n) ;
F_trapz = cumtrapz( x , f(x) ) ;
err_trapz = err( F_trapz , F(x) ) ;
fprintf( 'Metodo trapezi,  n = %-8d, errore = %.2e\n' , n , err_trapz ) ;
```

- *Equazioni differenziali ordinarie.* Un'equazione differenziale ordinaria (EDO) di ordine n è del tipo

$$F\Big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\Big) = 0$$

e assumiamo che essa si può esplicitare rispetto alla derivata di ordine massimo $y^{(n)}(x)$ nella seguente forma normale:

$$y^{(n)}(x) = G\Big(x, \underbrace{y(x)}_{y_1}, \underbrace{y'(x)}_{y_2}, \ldots, \underbrace{y^{(n-1)}(x)}_{y_n}\Big)$$

La precedente forma normale si può a sua volta esprimere come un sistema di n equazioni del prim'ordine, poste in forma normale, utilizzando delle nuove n variabili $y_i = y^{(i-1)} \Rightarrow y_i' = y_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = G\Big(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\Big) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \begin{Bmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ G(x, \mathbf{y}) \end{Bmatrix} = \mathbf{g}(x, \mathbf{y})$$

dove $\mathbf{y} = (y_i)$ è un vettore (colonna).

- La precedente forma vettoriale

$$\mathbf{y}' = \mathbf{g}(x, \mathbf{y})$$

è quella richiesta da MATLAB per la risoluzione numerica di EDO, ossia un sistema di EDO del prim'ordine posto in forma normale.
- La funzione più comune per svolgere tale calcolo è `ode45`:

```
[ x , y ] = ode45( g , x0_xE , y0 )
```

dove `g` è la funzione vettoriale $\mathbf{g}(x, \mathbf{y})$ che definisce il predente sistema di EDO, `x0_xE` è il vettore di due componenti degli estremi dell'intervallo d'integrazione $[x_0, x_E]$ dove è richiesta la soluzione e `y0` è il vettore dei valori iniziali, ossia $\mathbf{y}(x_0)$. `ode45` restituisce in uscita la soluzione `y` valutata per gli m valori $x_1, \ldots, x_m \in [x_0, x_E]$ riportati nel vettore (colonna) `x`; gli estremi sono compresi: $x_1 = x_0$ e $x_m = x_E$. La soluzione `y` è una matrice $m \times n$ dove ogni riga `y(j,:)` è il vettore delle variabili incognite valutate per $x = x_j$, ossia $\mathbf{y}(x_j)$.
- La funzione vettoriale (colonna) `g` da implementare in MATLAB dovrà sempre essere funzione di due variabili, la prima variabile scalare x e la seconda variabile vettoriale $\mathbf{y}$:

Funzione anonima

```
g = @(x,y) istruzione
```

`g.m`

```
function y_primo = g(x,y)
  istruzioni
end
```

- Caso
$$y'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$
ossia $\mathbf{g}(x, \mathbf{y}) = f(x)$.
- In tal caso, essendo $\mathbf{g}$ una funzione scalare ($n = 1$) di una sola variabile scalare x, essa si può implementare direttamente mediante funzione anonima.
- Esempio con $f(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$, $x_E = 1$ e $y_0 = y(x_0) = 0$, cioè
$$y(x) = \int_{0}^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,, \quad x \in [0, 1]$$

```
f = @(x) exp(-x .^ 2) ;
g = @(x,y) f(x) ;
x0_xE = [ 0 1 ] ; % estremi d'integrazione
y0 = 0 ;          % valore iniziale
[ x , y ] = ode45( g , x0_xE , y0 ) ;
```

ottenendo il vettore colonna `y` della funzione integrale $y(x)$ calcolata per i valori di x riportati nel vettore colonna `x`.
- In questo caso specifico si può fare una verifica della soluzione appena ottenuta mediante `ode45` con la funzione integrale implementata in `F_integrale.m` dell'esercizio `Parte3_Es14`:

```
y_verifica = F_integrale( f , 0 , x ) ;
```

- Caso

$$y'(x) = a(x)y \quad \Rightarrow \quad \log\left(\frac{y(x)}{y_0}\right) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$$

  ossia $\mathbf{g}(x, \mathbf{y}) = a(x)y$.
- **g** si può ancora implementare direttamente mediante funzione anonima.
- Esempio con $a(x) = -2x$, $x_0 = 0$, $x_E = 3$ e $y_0 = y(x_0) = 1$, cioè

$$y(x) = e^{-x^2}, \quad x \in [0, 3]$$

```
a = @(x) -2*x ;
g = @(x,y) a(x) * y ;
x0_xE = [ 0 3 ] ; % estremi d'integrazione
y0 = 1 ;          % valore iniziale
[ x , y ] = ode45( g , x0_xE , y0 ) ;
```

  ottenendo quindi nel vettore colonna `y` un'approssimazione del vettore `exp(-x.^2)`.
- Si può quindi fare una verifica calcolando esplicitamente $y(x) = e^{-x^2}$:

```
y_verifica = exp(-x .^ 2) ;
```

- Caso
$$my''(x) + cy'(x) + ky(x) = f(x)$$
- Si pone quindi $y_1 = y$ e $y_2 = y' = y_1'$; ponendo l'equazione differenziale in forma normale si ha quindi
$$y''(x) = y_2' = \frac{f(x) - cy'(x) - ky(x)}{m} = \frac{f(x) - cy_2 - ky_1}{m} = G(x, y_1, y_2)$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{g}(x, \mathbf{y}) = \begin{Bmatrix} y_2 \\ G(x, y_1, y_2) \end{Bmatrix}$$
- Caso con $m = 1$, $c = 10$, $k = 10000$ e la funzione onda quadra di periodo $T = 2$ per $f(x)$:

onda_quadra.m

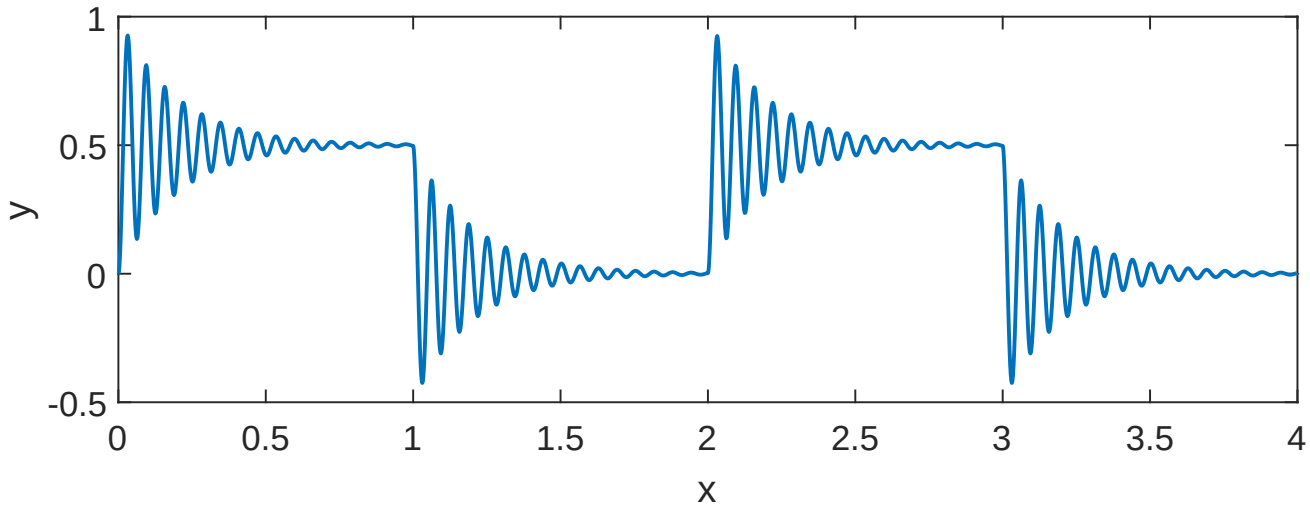
```
function y = onda_quadra(x, T)
  y = 0*x ;
  ix = mod(x, T) < T/2 ;
  y(ix) = 1 ;
end
```

```
f = @(x) 5000 * onda_quadra(x, 2) ;
m = 1 ;      % massa
c = 10 ;     % dissipazione
k = 10000 ; % costante elastica
G = @(x,y) ( f(x) - c*y(2) - k*y(1) ) / m ;
g = @(x,y) [ y(2) ; G(x,y) ] ;
x0_xE = [ 0 4 ] ; % estremi d'integrazione
y0    = [ 0 0 ] ; % valori iniziali
[ x , y ] = ode45( g , x0_xE , y0 ) ;
```

- Mediante un plot della variabile $y = y_1$ (prima colonna di y)

```
plot( x , y(:,1) ) ;
```

si ottiene:



- Nel caso di $f(x) = A\sin(\omega x)$ e $c > 0$, si può verificare che la soluzione a regime è nuovamente armonica ma con semiampiezza B

$$B = \frac{A}{|k - m\omega^2 + j\omega c|}$$

```
w = 2*pi*10 ;
f = @(x) 10000 * sin(w*x) ;
...
B = 10000 / abs( k - m*w^2 + 1i*w*c ) ;
```