Spazi connessi

Def. Uno spazio topologico X è *connesso* se gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi di X sono $\emptyset$ e X. Uno spazio non connesso è detto *sconnesso*.

Oss. X sconnesso $\Leftrightarrow \exists\, \emptyset \neq U \subsetneq X$ aperto e chiuso.

Prop. *X è sconnesso $\Leftrightarrow$ X è unione di due aperti non vuoti disgiunti.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $U \subsetneq X$ aperto e chiuso non vuoto $\rightsquigarrow V := X - U \neq \emptyset$ aperto.
$\boxed{\Leftarrow}$ $X = U \cup V$ con $U, V \subset X$ aperti non vuoti disgiunti $\Rightarrow U \subsetneq X$ aperto e chiuso non vuoto. $\square$

Cor. *X connesso $\Leftrightarrow \forall\, U, V \subset X$ aperti t.c. $U \cup V = X$ e $U \cap V = \emptyset$ si ha $U = \emptyset$ oppure $V = \emptyset$.*

Esempi.

(*1*) $X = [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbf{R}$ sconnesso.

(*2*) $\mathbf{R}_\ell$ sconnesso: $\mathbf{R}_\ell =]-\infty, 0[\cup [0, +\infty[$ aperti non vuoti.

(*3*) $\forall\, X_{\text{ban}}$ connesso.

(*4*) X_{dis} connesso $\Leftrightarrow \#\, X_{\text{dis}} = 1$.

(*5*) $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ connesso $\Leftrightarrow X_i$ connesso e $\#\, I = 1$ (unione banale).

Teor. $[0,1]$ *è connesso.*

Dim. Per assurdo $[0,1] = U \cup V$ aperti non vuoti disgiunti con $0 \in U \Rightarrow$ U, V chiusi quindi compatti $\rightsquigarrow \nu = \min V > 0 \Rightarrow [0, \nu[\subset U \Rightarrow$ $\mathrm{Cl}_{[0,1]}[0,\nu[= [0,\nu] \subset U \Rightarrow \nu \in U \cap V \neq \emptyset$ contraddizione. $\square$

Teor. *$f : X \to Y$ continua suriettiva e X connesso $\Rightarrow$ Y connesso.*

Dim. Per assurdo $Y = V_1 \cup V_2$ aperti non vuoti disgiunti $\rightsquigarrow U_1 = f^{-1}(V_1)$, $U_2 = f^{-1}(V_2)$ aperti non vuoti disgiunti e $X = U_1 \cup U_2$, contraddizione. $\square$

Cor. *$f : X \to Y$ continua e X connesso $\Rightarrow f(X) \subset Y$ connesso.*

Oss. Immagine continua di un connesso è connessa.

Teor. *$X = \bigcup_{i \in I} X_i$ con X_i connesso $\forall\, i \in I$ e $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset \Rightarrow X$ connesso.*

Dim. $x_0 \in \bigcap_{i \in I} X_i$. Per assurdo $X = U \cup V$ aperti non vuoti disgiunti con $x_0 \in U$, $x_1 \in V \rightsquigarrow x_1 \in X_{i_1} \Rightarrow A = X_{i_1} \cap U$, $B = X_{i_1} \cap V$ aperti non vuoti disgiunti in X_{i_1} t.c. $X_{i_1} = A \cup B$ contraddizione. $\square$

Prop. *$Y \subset X$ sottospazio connesso $\Rightarrow \mathrm{Cl}_X Y$ connesso.*

Dim. $\forall\, U \subset \mathrm{Cl}_X Y$ aperto e chiuso non vuoto $\Rightarrow U$ chiuso in X e $\exists\, \tilde{U} \subset X$ aperto in X t.c. $U = \tilde{U} \cap \mathrm{Cl}_X Y \Rightarrow U \cap Y = \tilde{U} \cap Y \neq \emptyset$ aperto e chiuso in $Y \Rightarrow U \cap Y = Y \subset U \Rightarrow \mathrm{Cl}_X Y \subset U \Rightarrow \mathrm{Cl}_X Y = U$. $\square$

Componenti connesse.

Def. Dato uno spazio topologico X, la *componente connessa* di $x \in X$ è

$$\mathcal{C}_x(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{x \in C \subset X \\ C \text{ conn.}}} C$$

Teor. *Valgono le seguenti proprietà:*

(1) $x \in \mathcal{C}_x(X) \neq \emptyset$, $\forall\, x \in X$;

(2) $\mathcal{C}_x(X)$ *è il più grande sottospazio connesso di* X *che contiene* x;

(3) $\forall\, x, y \in X$, $\mathcal{C}_x(X) \cap \mathcal{C}_y(X) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{C}_x(X) = \mathcal{C}_y(X)$;

(4) $\mathcal{C}_x(X)$ *chiuso in* X, $\forall\, x \in X$.

Dim.

(1) $\{x\}$ connesso quindi è nell'unione.

(2) $\mathcal{C}_x(X)$ connesso perché unione di connessi con intersezione non vuota.

(3) $\boxed{\Leftarrow}$ Ovvio.

$\boxed{\Rightarrow}$ $x, y \in \mathcal{C}_x(X) \cup \mathcal{C}_y(X)$ connesso $\Rightarrow \mathcal{C}_x(X) \cup \mathcal{C}_y(X) \subset \mathcal{C}_x(X) \Rightarrow \mathcal{C}_y(X) \subset \mathcal{C}_x(X)$ e similmente per l'altra inclusione.

(4) $x \in \mathrm{Cl}_X(\mathcal{C}_x(X))$ connesso $\Rightarrow \mathrm{Cl}_X(\mathcal{C}_x(X)) \subset \mathcal{C}_x(X) \Rightarrow$
$\mathrm{Cl}_X(\mathcal{C}_x(X)) = \mathcal{C}_x(X)$ chiuso. □

Def. $\mathcal{C}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{C}_x(X) \mid x \in X\}$ *insieme delle componenti connesse di* X.

Oss. $\mathcal{C}(X)$ è una partizione di X in sottospazi chiusi disgiunti.

Oss. X connesso $\Leftrightarrow$ X ha un'unica componente connessa.

Oss. $\mathcal{C}(X)$ finito $\Rightarrow \mathcal{C}_x(X)$ aperto in X, $\forall\, x \in X \Rightarrow X$ unione topologica delle sue componenti connesse.

Def. Uno spazio topologico X è *localmente connesso* se $\forall\, x \in X$, $\exists\, \mathcal{J}_x$ base di intorni aperti connessi di x in X.

Teor. *X loc. connesso $\Rightarrow \mathcal{C}_x(X)$ aperto in X, $\forall\, x \in X$.*

Dim. $\forall\, y \in \mathcal{C}_x(X)$, $\exists\, J \subset X$ intorno conn. di $y \Rightarrow J \subset \mathcal{C}_y(X) = \mathcal{C}_x(X)$. □

Cor. *X loc. conn. $\Rightarrow$ X unione topologica delle sue componenti connesse.*

Oss. Connesso e loc. connesso sono proprietà topologiche.

Esempi.

(1) $X = [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbf{R}$, $\mathcal{C}_3(X) = [2,3]$, $\mathcal{C}(X) = \{[0,1], [2,3]\}$.

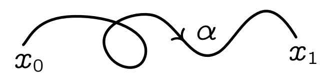
(2) $X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\} \subset \mathbf{R}$, $\mathcal{C}_0(X) = \{0\}$ non è aperto in X.

Cammini continui

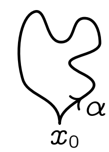
Nel seguito poniamo $I = [0, 1]$ con la topologia Euclidea.

Def. Un *cammino* o *arco* continuo in uno spazio topologico X è un'applicazione continua $\alpha : I \to X$. $x_0 = \alpha(0)$ e $x_1 = \alpha(1)$ sono gli *estremi* di α, x_0 *punto iniziale*, x_1 *punto terminale*, α cammino tra x_0 e x_1.
Un cammino $\alpha : I \to X$ è detto *cappio* se $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ (*punto base*).

I cammini saranno sempre considerati continui.



Cappio costante. $x_0 \in X \rightsquigarrow x_0 : I \to X$, $x_0(t) = x_0$, $\forall\, t \in I$.

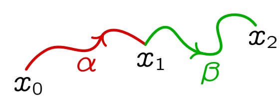


Concatenazione di cammini. $\alpha, \beta : I \to X$ cammini t.c.

$$\alpha(0) = x_0,\ \alpha(1) = \beta(0) = x_1,\ \beta(1) = x_2 \rightsquigarrow$$

$$\alpha \cdot \beta : I \to X$$

$$(\alpha \cdot \beta)(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$



Oss. $\alpha \cdot \beta$ continua in $t = \frac{1}{2}$ perché $\alpha(1) = \beta(0)$.

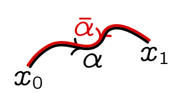
Def. $\alpha \cdot \beta$ si chiama *concatenazione* o *composizione* dei cammini α e β.

Oss. α e β cappi $\Rightarrow \alpha \cdot \beta$ cappio.

Cammino inverso. $\alpha : I \to X$ cammino t.c. $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1 \rightsquigarrow$

$$\bar{\alpha} : I \to X$$

$$\bar{\alpha}(t) \overset{\text{def}}{=} \alpha(1-t)$$



Si ha $\bar{\alpha}(0) = x_1$ e $\bar{\alpha}(1) = x_0$.

Def. $\bar{\alpha}$ è detto *cammino inverso* di α.

Oss. α cappio $\Rightarrow \bar{\alpha}$ cappio.