Spazi connessi per archi

Def. Uno spazio topologico X è *connesso per archi (cpa)* se $\forall\, x_0, x_1 \in X$ $\exists\, \alpha : I \to X$ cammino continuo t.c. $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$.

Teor. *X connesso per archi $\Rightarrow$ X connesso.*

Dim. Per assurdo X sconnesso $\rightsquigarrow$ $X = U \cup V$ aperti non vuoti disgiunti. Scegliamo $x_0 \in U$, $x_1 \in V$ $\rightsquigarrow$ $\alpha : I \to X$ cammino t.c. $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1 \Rightarrow 0 \in \tilde{U} := \alpha^{-1}(U)$ e $1 \in \tilde{V} := \alpha^{-1}(V)$ aperti non vuoti disgiunti e $[0,1] = \tilde{U} \cup \tilde{V} \Rightarrow [0,1]$ sconnesso, contraddizione. □

Teor. *$f : X \to Y$ continua suriettiva e X cpa $\Rightarrow$ Y cpa.*

Dim. $\forall\, y_0, y_1 \in Y \rightsquigarrow x_0 \in f^{-1}(y_0)$, $x_1 \in f^{-1}(y_1) \rightsquigarrow \alpha : I \to X$ cammino t.c. $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1 \Rightarrow \beta = f \circ \alpha : I \to Y$ cammino t.c. $\beta(0) = y_0$, $\beta(1) = y_1$. □

Cor. *$f : X \to Y$ continua e X cpa $\Rightarrow$ $f(X) \subset Y$ cpa.*

Oss. Immagine continua di un connesso per archi è connessa per archi.

Def. $U \subset \mathbf{R}^n$ è *convesso* se $\forall\, x_0, x_1 \in U \Rightarrow$ il segmento $[x_0, x_1] \subset U$.

Oss. $U \subset \mathbf{R}^n$ convesso e $x_0, x_1 \in U \rightsquigarrow$

$$\alpha : I \to U$$
$$\alpha(t) = (1-t)x_0 + tx_1 \quad (\textit{combinazione convessa} \text{ di } x_0 \text{ e } x_1)$$

parametrizza il segmento $[x_0, x_1]$ quindi è un cammino in U tra x_0 e x_1.

Esempi.

(*1*) $U \subset \mathbf{R}^n$ convesso $\Rightarrow$ U cpa.

(*2*) Ogni intervallo $J \subset \mathbf{R}$ è convesso quindi cpa.

(*3*) $\mathbf{R}^n - \{0\}$ cpa $\forall\, n \geqslant 2$: $\forall\, x_0, x_1 \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ se $[x_0, x_1]$ non passa per 0 abbiamo un cammino. Se $[x_0, x_1]$ passa per 0 $\rightsquigarrow$ $[x_0, x_2] \cup [x_2, x_1]$.

(*4*) S^n cpa $\forall\, n \geqslant 1$: $f : \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \to S^n$, $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ continua e suriettiva.

(*5*) $\mathbf{RP}^n$ e $\mathbf{CP}^n$ cpa $\forall\, n \geqslant 0$.

Lem. *X spazio topologico e $x_0 \in X$. X cpa $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in X$, $\exists\, \alpha : I \to X$ cammino t.c. $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x$.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Per definizione.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, x, y \in X \rightsquigarrow \alpha, \beta : I \to X$ cammini t.c. $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$, $\alpha(1) = x$, $\beta(1) = y \Rightarrow \gamma := \bar{\alpha} \cdot \beta : I \to X$ cammino t.c. $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. □

Teor. *$X = \bigcup_{i \in I} X_i$ con X_i cpa $\forall\, i \in I$ e $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset \Rightarrow X$ cpa.*

Dim. $x_0 \in \bigcap_{i \in I} X_i$. $\forall\, x \in X \rightsquigarrow x \in X_i \rightsquigarrow$ cammino tra x_0 e x in $X_i \subset X$. □

Componenti connesse per archi.

Def. Dato uno spazio X, la *componente connessa per archi* di $x \in X$ è

$$\mathcal{P}_x(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{x \in P \subset X \\ P \text{ cpa}}} P$$

Teor. *Valgono le seguenti proprietà:*
(1) $x \in \mathcal{P}_x(X) \neq \emptyset$, $\forall\, x \in X$;

(2) $\mathcal{P}_x(X)$ *è il più grande sottospazio cpa di* X *che contiene* x;

(3) $\forall\, x, y \in X$, $\mathcal{P}_x(X) \cap \mathcal{P}_y(X) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}_x(X) = \mathcal{P}_y(X)$;

(4) $\mathcal{P}_x(X) \subset \mathcal{C}_x(X)$, $\forall\, x \in X$.

Dim.
(1) $\{x\}$ cpa quindi è nell'unione.

(2) $\mathcal{P}_x(X)$ cpa perché unione di cpa con intersezione non vuota.

(3) $\boxed{\Leftarrow}$ Ovvio.
$\boxed{\Rightarrow}$ $x, y \in \mathcal{P}_x(X) \cup \mathcal{P}_y(X)$ cpa $\Rightarrow \mathcal{P}_x(X) \cup \mathcal{P}_y(X) \subset \mathcal{P}_x(X) \Rightarrow$ $\mathcal{P}_y(X) \subset \mathcal{P}_x(X)$ e similmente per l'altra inclusione.

(4) $\mathcal{P}_x(X)$ cpa $\Rightarrow \mathcal{P}_x(X)$ connesso. $\square$

N. B. Le componenti cpa non sono necessariamente chiuse né aperte.

Def. $\mathcal{P}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{P}_x(X) \mid x \in X\}$ *insieme delle componenti connesse per archi di* X.

Oss. $\mathcal{P}(X)$ è una partizione di X in sottospazi disgiunti.

Oss. X cpa $\Leftrightarrow X$ ha un'unica componente cpa.

Def. Uno spazio topologico X è *localmente connesso per archi* se $\forall\, x \in X$, $\exists\, \mathcal{J}_x$ base di intorni aperti connessi per archi di x in X.

Teor. *X loc. cpa $\Rightarrow \mathcal{P}_x(X) = \mathcal{C}_x(X)$ aperto e chiuso in X, $\forall\, x \in X$.*

Dim. $\forall\, y \in \mathcal{P}_x(X) \rightsquigarrow J \subset X$ intorno cpa di $y \Rightarrow J \subset \mathcal{P}_y(X) = \mathcal{P}_x(X) \Rightarrow$ $\mathcal{P}_x(X)$ aperto in X, $\forall\, x \in X$.

U unione delle componenti cpa diverse da $\mathcal{P}_x(X) \Rightarrow U$ aperto e chiuso in X, $U \cap \mathcal{P}_x(X) = \emptyset$ e $X = U \cup \mathcal{P}_x(X) \Rightarrow U' = U \cap \mathcal{C}_x(X)$ aperto e chiuso in $\mathcal{C}_x(X)$ e $\mathcal{C}_x(X) = U' \cup \mathcal{P}_x(X) \Rightarrow U' = \emptyset$ e $\mathcal{C}_x(X) = \mathcal{P}_x(X)$. $\square$

Cor. *X loc. cpa $\Rightarrow X$ è unione topologica delle sue componenti cpa, che coincidono con le componenti connesse.*

Cor. *X connesso e loc. cpa $\Rightarrow X$ cpa.*

Oss. Cpa e loc. cpa sono proprietà topologiche.

Cor. *X loc. cpa e II-numerabile $\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ al più numerabile.*

Dim. X è unione topologica delle componenti cpa e queste sono aperte.
$\forall\, P \in \mathcal{P}(X)$ scegliamo $a_P \in P$ (assioma della scelta).
$A := \{a_P \mid P \in \mathcal{P}\} \subset X$ sottospazio discreto $\Rightarrow A$ è II-numerabile $\underset{\text{proprietà ereditaria}}{\Rightarrow}$
$A \cong \mathcal{P}(X)$ al più numerabile $\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ al più numerabile. $\square$

Cor. *$U \subset \mathbf{R}^n$ aperto $\Rightarrow U$ unione al più numerabile di aperti disgiunti e connessi per archi.*

Dim. U è II-numerabile e ogni $x \in U$ ammette base di intorni di bocce aperte che sono cpa perché convesse $\Rightarrow U$ loc. cpa. $\square$

Teor. *$X \subset \mathbf{R}$ connesso $\Leftrightarrow X$ è un punto o un intervallo $\Leftrightarrow X \subset \mathbf{R}$ cpa.*

Dim. I punti e gli intervalli sono cpa quindi connessi. Resta da dimostrare che $X \subset \mathbf{R}$ connesso e $\# X > 1 \Rightarrow X$ intervallo.
Per assurdo, supponiamo che $\exists\, a < b < c$ t.c. $a, c \in X$ e $b \notin X \Rightarrow$
$a \in U :=]-\infty, b[\cap X$ e $c \in V :=]b, +\infty[\cap X$ aperti non vuoti disgiunti in X t.c. $X = U \cup V \Rightarrow X$ sconnesso, contraddizione. $\square$

Cor. *$U \subset \mathbf{R}$ aperto $\Leftrightarrow U$ unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti.*

Lem. *$f : [a, b] \to [c, d]$ continua e biiettiva $\Rightarrow f(\{a, b\}) = \{c, d\}$.*

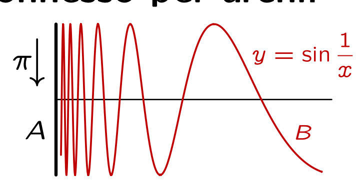
Dim. Per assurdo, $c < f(a) = s < d \Rightarrow f(]a, b]) = [c, s[\cup]s, d] \Rightarrow$ $[c, s[\cup]s, d]$ connesso, contraddizione. Analogamente per $f(b)$. $\square$

Teor. *$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e biiettiva $\Rightarrow f$ omeomorfismo.*

Dim. $\forall\, a < b \Rightarrow f([a, b]) = [c, d]$ intervallo compatto $\Rightarrow f(]a, b[) =]c, d[$ $\Rightarrow f$ aperta. $\square$

N. B. Più in generale $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ continua e biiettiva $\Rightarrow f$ omeomorfismo, ma non abbiamo gli strumenti per dimostrarlo se $n \geqslant 2$.

Esempio standard di spazio connesso ma non connesso per archi.



$A = \{0\} \times [-1, 1]$ cpa

$$B = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \,\middle|\, x > 0 \right\} \cong]0, +\infty[\text{ cpa}$$

$X \overset{\text{def}}{=} A \cup B = \mathrm{Cl}_{\mathbf{R}^2} B \subset \mathbf{R}^2 \Rightarrow X$ connesso.
X non cpa, infatti se per assurdo $\alpha : I \to X$ cammino t.c.
$\alpha(0) = (0, 0)$, $\alpha(1) = (1, \sin 1) \Rightarrow \pi(\alpha(I)) = [0, a]$ con $a \geqslant 1 \Rightarrow$
α percorre tutti i max loc. $\Rightarrow$ il limite in 0 non esiste $\Rightarrow \alpha$ non continua.
$\mathcal{P}(X) = \{A, B\}$.