# Teorema di determinazione

**Teor.** *Siano $V$ e $W$ $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per $V$ e $w_1, \dots, w_n \in W$ vettori arbitrari. Allora esiste un'unica applicazione lineare*

$$f : V \to W \quad t.c.$$
$$f(b_1) = w_1$$
$$\vdots$$
$$f(b_n) = w_n.$$

*Dim.* $\boxed{\textit{Unicità}}$ Supponiamo $f : V \to W$ lineare t.c. $f(b_i) = w_i$, $\forall\, i$.

$\forall\, v \in V \rightsquigarrow v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \Rightarrow f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(b_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i.$

Le coordinate $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ di $v$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono univocamente determinate $\Rightarrow$ $f(v)$ ha l'unico possibile valore dato dalla formula

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$$

e quindi $f$ è unica.

$\boxed{\textit{Esistenza}}$ L'ultima formula suggerisce la definizione di $f$:

$$f : V \to W$$
$$f(v) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i, \quad \text{con } v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i.$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathcal{B}}, \dots, b_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathcal{B}} \rightsquigarrow \begin{cases} f(b_1) = w_1 \\ \quad \vdots \\ f(b_n) = w_n \end{cases}$$

Resta da dimostrare che $f$ è lineare.

$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ e $u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i \Rightarrow v + u = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) b_i \Rightarrow$

$f(v + u) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i = f(v) + f(u).$

$\beta \in \mathbb{K} \Rightarrow \beta v = \sum_{i=1}^{n} \beta \alpha_i b_i \Rightarrow f(\beta v) = \sum_{i=1}^{n} \beta \alpha_i w_i = \beta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = \beta f(v).$ $\square$

**Cor.** *Siano $V$ e $W$ di dimensione finita. Allora $V \cong W \Leftrightarrow$* $\dim V = \dim W$.

*Dim.* $\boxed{\Rightarrow}$ Corollario della lezione precedente.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\dim V = \dim W = n$, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per $V$ e $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ base per $W \rightsquigarrow f : V \to W$ lineare t.c. $f(b_i) = c_i$, $\forall i \Rightarrow f$ isomorfismo perché $f$ manda una base in una base. □

**Cor.** $V \cong \mathbb{K}^n \Leftrightarrow \dim V = n$.

**Oss.** $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per $V \rightsquigarrow$

$$f : V \to \mathbb{K}^n \text{ isomorfismo t.c.}$$

$$f(b_i) = e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \Rightarrow f(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Quindi $f$ associa a $v \in V$ le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.

**Oss.** La scelta di un isomorfismo $f : V \to \mathbb{K}^n$, con $\dim V = n$, equivale alla scelta di una base per $V$ data dai vettori $b_i = f^{-1}(e_i)$, $i = 1, \dots, n$, corrispondenti alla base canonica di $\mathbb{K}^n$.

**Oss.** Due spazi vettoriali isomorfi sono fatti essenzialmente nello stesso modo, hanno le stesse proprietà dal punto di vista dell'Algebra lineare, anche se non sono esattamente lo stesso spazio. In questo senso possiamo considerare $\mathbb{K}^n$ come modello per tutti i $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione $n$.

# Matrici di applicazioni lineari

$V$ e $W$ $\mathbb{K}$-spazi vettoriali con $\dim V = n$ e $\dim W = m$.
$f : V \to W$ applicazione lineare. Scegliamo basi
$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ per $V$
$\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ per $W \rightsquigarrow f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i \rightsquigarrow A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$
$A$ è costruita per colonne: $A_{(j)}$ è la colonna delle coordinate di $f(b_j)$.

$$v \in V \rightsquigarrow v = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{\mathcal{B}}$$

$$\begin{aligned} f(v) &= \sum_{j=1}^{n} x_j f(b_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) c_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} y_i c_i = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}^{\mathcal{C}}, \quad \text{con } y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j. \end{aligned}$$

Poniamo ora

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$f$ si rappresenta in coordinate con l'equazione

$$f : \ Y = AX$$

quindi $A$ permette di calcolare $f$ in coordinate. Scriviamo anche

$$f(X) = AX.$$

**Def.** $A$ si chiama *matrice di $f$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$* e $\mathcal{C}$. Si indica con $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Viceversa, fissate le basi e data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, ponendo $f(X) = AX$ resta definita un'applicazione lineare $f : V \to W$. Abbiamo quindi il teorema.

**Teor.** *Scelte le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ risp. per $V$ e $W$, c'è una biiezione tra applicazioni lineari $f : V \to W$ e matrici $m \times n$, che associa a $f$ la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$.*

**N. B.** Questo ha senso solo se sono fissate basi per dominio e codominio. Senza basi non si associa niente.

**N. B.** Se $f : V \to V$ è un endomorfismo (lineare con stesso dominio e codominio), spesso useremo la stessa base $\mathcal{B}$ sia nel dominio che nel codominio (anche se questo non è obbligatorio). Per semplificare la notazione scriveremo anche $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

**Oss.** $M_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = I_n$ perché $\mathrm{id}_V(v) = v$ e $I_n X = X$.

**Oss.** $\forall\, A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \Rightarrow M_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m}(L_A) = A$ perché $L_A(X) = AX$.