

# RG flow

$$\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu} \leftarrow g(\mu)$$

Integriamo

$$\int_{g(\mu_0)}^{g(\mu)} \frac{dg}{\beta(g)} = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu'}{\mu'} = \ln(\mu/\mu_0)$$

in regime perturbativo

$$\frac{1}{\beta_0} \int_{g(\mu_0)}^{g(\mu)} \frac{dg}{g^3} = \frac{1}{\beta_0} \left( -\frac{1}{2g^2} \Big|_{g(\mu_0)}^{g(\mu)} \right) = \frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu)} - \frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu_0)}$$

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} + \beta_0 \ln(\mu_0^2/\mu^2)$$

$$g^2(\mu) = \frac{g^2(\mu_0)}{1 + \beta_0 g^2(\mu_0) \ln(\mu_0^2/\mu^2)}$$

1-loop      higher loops  
↓            ↓

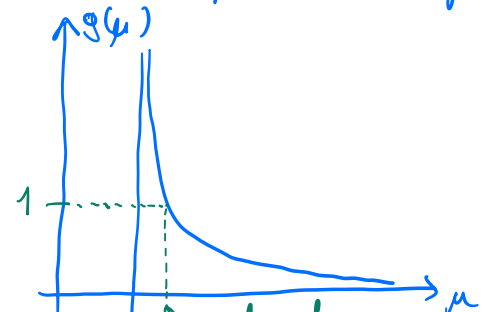
$$\beta(g) = \beta_0 g^3 + \dots$$

(ordini superiori in g)

Valida in regime perturbativo ( $g(\mu) \ll 1$ )

$$\beta_0 = -\frac{11}{3} \frac{C_2(G)}{(4\pi)^2} \text{ in YM}$$

Se  $\beta_0 < 0$ , calando la scala, ad un certo  $\mu_0$  trovo un polo



scale dove non è valide le perturbative; è vicina al polo.

YM:

$$\beta_0 = -\frac{11}{3} \frac{C_2(G)}{(4\pi)^2} < 0 \Rightarrow \text{all'aumentare della scala } \mu, g(\mu) \text{ diminuisce} \rightarrow \text{ASYMPTOTIC FREEDOM in UV}$$

$\Rightarrow$  diminuendo la scala  $\mu$ ,  $g(\mu)$  aumenta e ad un certo punto diventa  $> 1 \rightarrow$  Regime di ACCOPPIAMENTO FORTE (strong coupling) a basse energie

# Dimensional transmutation

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} + \beta_0 \ln(\mu_0^2/\mu^2) \rightarrow \frac{\mu}{\mu_0} = e^{\frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu_0)}} \cdot e^{-\frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu)}}$$

$$\Rightarrow \mu e^{\frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu)}} = \mu_0 e^{\frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu_0)}} \leftarrow \text{dimensioni di una scala di ENERGIA}$$

$$\Rightarrow \Lambda(\mu) \equiv \mu e^{\frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu)}} \quad \text{è INDIPENDENTE della scala } \mu \text{ ed è chiamata } \Lambda_{\text{QCD}}$$

- $\Lambda_{\text{QCD}}$  è una SCALA della TEORIA "generata" della QFT.
- $\Lambda_{\text{QCD}}$  è detta SCALA DI QCD o "RG-invariant scale"
- $\Lambda_{\text{QCD}}$  è la scala  $\bar{\mu}$  a cui  $g(\bar{\mu}) \rightarrow \infty$  (però in questo caso  $\mu = \Lambda_{\text{QCD}}$ )
- $\Lambda_{\text{QCD}}$  è la scala sotto la quale la teoria diventa fortemente accoppiata

↪ La teoria di YM classica non ha parametri che hanno mass-dimension non nulle.

D'altra parte, la QFT ha "generato" una scala fisica  $\Lambda_{\text{QCD}}$ .

↪ "DIMENSIONAL TRANSMUTATION"

Domanda: come appare la teoria di YM a scale  $\ll \Lambda_{QCD}$ ?

Risposta parziale ottenuta da analisi di esperimenti  
e calcoli numerici sul reticolo:

- YM non descrive particelle MASSLESS.

- invece, i gluoni sono in stati compattati detti

GLUEBALLS che sono particelle MASSIVE  $m \sim \Lambda_{QCD}$   
→ si dice che la Teoria ha un MASS GAP  
(c'è un gap tra lo stato di vuoto e il 1° livello eccitato)

Risultati quantitativi  
ottenuti "mettendo la teoria  
sul RETICOLO (Lattice)",  
cioè  $\mathbb{R}^4 \rightarrow$  RETICOLO  $\mathbb{Z}^4$

ESempi:  $\mathbb{Z}^2$   
o o o  
o o o  
o o o  
L

⇒ c'è distanza minima  $L \Rightarrow$  en. max  $\frac{1}{L} \sim$  cutoff della teoria.

→ conti numerici danno risultati quantitativi (approssimati).

→ Esempio: "YM ha un MASS GAP  $m \sim \Lambda_{QCD}$ ".

[ Il MASS GAP non è dimostrato analiticamente in YM ]

Quando una teoria cambia "modo di comportarsi"  
diciamo che c'è una transizione da una FASE all'altra.

Qui il cambiamento sarà dovuto a come variano  
i parametri della teoria.

Beta function:

$$\beta(g) = \beta_0 g^3 + \dots$$

materia  
fermionica

materia  
scalare

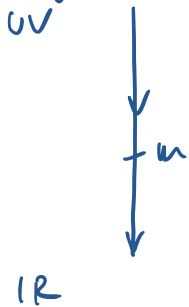
$$\text{dove } \beta_0 = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{11}{3} c_2(G) - \frac{4}{3} N_f c(R_f) - \frac{1}{3} N_s c(R_s) \right]$$



contributo di MASSLESS  
fields

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} - \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{11}{3} c_2(G) - \frac{4}{3} N_f c(R_f) - \frac{1}{3} N_s c(R_s) \right] \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}$$

RG flow  $\hat{=}$  lungo side di un.



Se un camp ha una massa  $m$ ,  
esso viene visto come camp MASSLESS  
a scale  $E \gg m$ ; invece a scale  
 $E \ll m$  il camp non propaga e  
può essere "integrato via" (integrated out)  
e non partecipa al running di  $g(\mu)$ .

## IR PHASES of QCD-like theories

Consideriamo teorie con  $N_s = 0$ , con

gruppo di gauge  $SU(N_c)$  ( $N_c$  viene detto  $n^{\circ}$  di colori)

e  $N_f$  fermioni in rep fondamentale ( $R_f = N_c$ )

$$\Rightarrow c_2(G) = N_c \quad c(R_f) = 1/2$$

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} - \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right] \ln \frac{\mu_0^2}{\mu^2}$$

Avremo una diversa dinamica  
a seconda del valore di  $\frac{N_f}{N_c}$

IR FREE PHASE  $N_f > \frac{11}{2} N_c \rightarrow \beta_0 > 0$

$\Rightarrow g(\mu)$  è sempre più DEBOLE andando nell'IR:  
possiamo fidarci dei conti semiclassici ma otteniamo  
bosoni di gauge e fermioni assolutamente accoppiati

Quando  $N_f = \frac{11}{2} N_c \rightarrow$  la funzione  $\beta$  è nulla  
a 1-loop

$\Rightarrow$  in questo caso  $\beta$  è  $> 0$ ,  $< 0$  o  $= 0$  dobbiamo  
calcolare il contributo a 2-loop ( $\beta_1$ )  
(la teoria è ancora IR-free in  $N_f = \frac{11}{2} N_c$ )

CONFORMAL WINDOW  $N_f$  appena sotto  $\frac{11}{2} N_c$

$$\beta(g) = \beta_0 g^3 + \beta_1 g^5 + \dots = g^3 (\beta_0 + \beta_1 g^2)$$

$\uparrow$                        $\uparrow$   
 1-loop                  2-loop

$$\beta_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( -\frac{11}{3} N_c + \frac{2}{3} N_f \right)$$

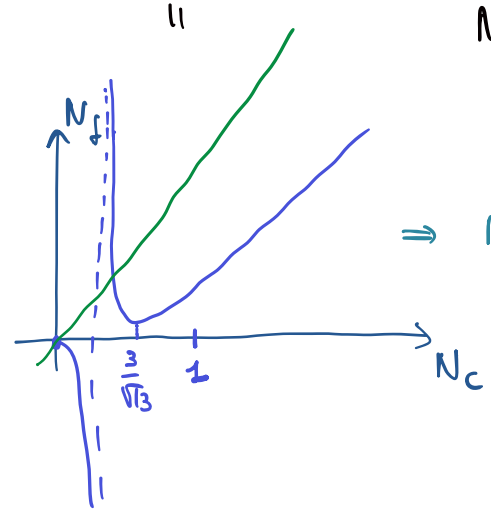
$$\beta_1 = \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left( -\frac{34}{3} N_c^2 + \frac{N_f (N_c^2 - 1)}{N_c} + \frac{10}{3} N_f N_c \right)$$

$$\beta_1 = \frac{22}{2} N_c^2 - \frac{11}{2} \text{ in } N_f = \frac{11}{2} N_c$$

$$\beta_1 > 0 \quad (\beta_0 = 0)$$

$\beta_1 > 0$  quando  $N_f > \frac{34}{13N_c^2-3} N_c^3$  • ha min e  $N_c^2 = 9/13$

$\beta_0 < 0$  "  $N_f < \frac{11}{2} N_c$  •



$\Rightarrow N_f \geq 1 \quad \frac{11}{2} N_c > \frac{34 N_c^3}{13 N_c^2 - 3}$

Quando  $\frac{34 N_c^3}{13 N_c^2 - 3} < N_f < \frac{11}{2} N_c \Rightarrow \beta(g)$  ha uno zero

$\ln \quad g_*^2 = -\frac{\beta_0}{\beta_1}$

$\beta_0, \beta_1$  dipendono da  $N_c, N_f \rightarrow$  il valore di  $g_*$  dipende pure da  $N_c, N_f$

Mettiamoci in  $\frac{N_f}{N_c} = \frac{11}{2} - \epsilon$  ( $\epsilon$  piccolo)

$g_*^2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right) \cdot \frac{1}{2N_c}$

$\frac{1}{(4\pi)^2} \left( -\frac{34}{3} N_c^2 + \frac{3 N_f (N_c^2 - 1)}{3 N_c} + \frac{10 N_f N_c}{3} \right) \cdot \frac{1}{2N_c}$

$= \frac{16\pi^2 \left( \frac{N_f}{N_c} - \frac{11}{2} \right)}{N_c \left( -17 + \frac{3}{2} \frac{N_f}{N_c} \left( \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \right) + 5 \frac{N_f}{N_c} \right)}$

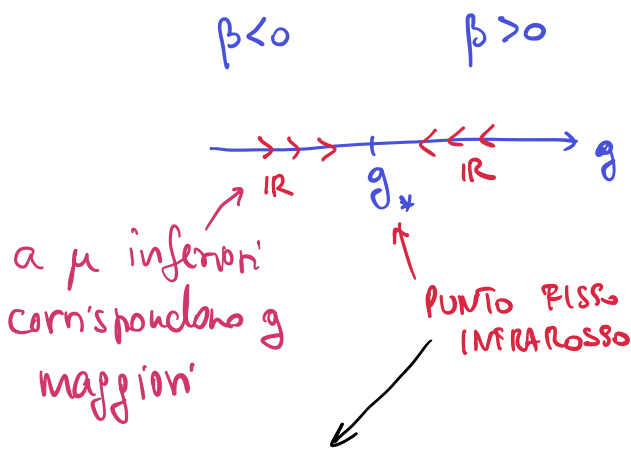
$\frac{N_f}{N_c} = \frac{11}{2} - \epsilon \rightarrow$

$g_*^2 = \frac{-16 \pi^2 \epsilon}{N_c \left( -17 + \frac{13}{2} \cdot \frac{11}{2} - \frac{37}{4N_c^2} + 6(\epsilon) \right)} = \frac{64 \pi^2 N_c}{75 N_c^2 - 33} \epsilon + 6(\epsilon^2)$

$\mu \ll 1 \rightarrow \boxed{g_*^2 \ll 1} \rightsquigarrow$  teoria è debolm. accoppiata

In particolare,  $\mu \ll 1$  l'analisi PERTURBATIVA che abbiamo fatto è VALIDA, cioè la teoria a basse energie è descritta da una teoria debolmente accoppiata che come pto fisso del RG flow è INVARIANTE sotto trasformazioni di scale (e "quasi" CONFORME)

"Banks-Zaks fixed pt"

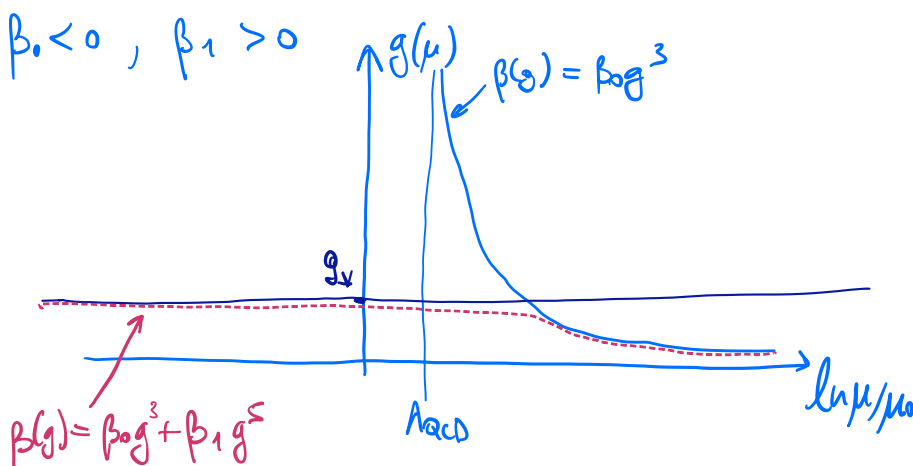


$$\beta = (\beta_0 + \beta_1 g^2) g^2 = g^2 \beta_1 (g^2 + \frac{\beta_0}{\beta_1}) = g^2 \beta_1 (g^2 - g_*^2)^{\beta_1}$$

$\beta_1 > 0$

è una teoria CONFORME (la simmetria CONFORME vincola molto la teoria, permettendo di trovare risultati altrimenti molto difficili).

[Nelle fake IR free, il pto fisso è a  $g=0 \rightsquigarrow$  teoria conforme è triviale.]



Vediamo che vicino alla regione di  $g$  in cui le serie perturbative non sarebbe più state valide, la curva di  $\beta(\mu)$  non esplode, ma tende a  $g_*$ .

Calcoliamo  $\frac{N_f}{N_c}$ : il risultato precedente ci dice che c'è un pto fisso IR NON-TRIVIALE, almeno finché vale la teoria delle perturbazioni, cioè fino  $N_f$  b.c.  $g_* \sim 1$ . Per  $N_f$  inferiori la teoria è fortemente accoppiata attorno a  $g_*$  e non possiamo più fidarci dei conti perturbativi che si fermano a 2-loop.

In generale, uno si aspetta che ci sia un pto fisso IR non-triviale

per  $N_* < N_f < \frac{11}{2} N_c$  "FINESTRA CONFORME"

per un certo valore critico  $N_*$ . Qual è il suo valore?

Conti numerici sul reticolo: c'è un'evidenza che per

$N_c = 3$  si abbia  $N_* \in [8, 12]$ ;

inoltre ci si aspetta l'andamento  $N_* \approx (3-4) N_c$ .

Per  $N_f \in N_*$   $\beta(g) < 0 \Rightarrow$  nell'IR la costante di accoppiam. è sufficientemente forte per portare al

**CONFINAMENTO**

(Qui intendiamo che tutti i quanti a energia finita sono singoletti di gauge.)

La maggior parte degli stati sono MASSIVI con  $m \sim \Lambda_{\text{QCD}}$

Però ci sono anche dei modi molto leggeri (MASSLESS se fermioni di portate sono massivi)

↳ SSB:  $\langle \Psi_i^L \Psi_j^R \rangle \sim \delta_{ij}$   $i, j = 1, \dots, N_f$   
 cont. su reticolo diverso  $\neq 0$



Qto VEV (vacuum expectation value) rompe SPONTANEAMENTE la  
CHIRAL SYMMETRY della Lagrangiana della fermi  
in considerazione

→ BOSONI DI GOLDSTON

(  $\pi, \pi^\dagger$  se sym è SU(2)  
ottetto se sym è SU(3) )