

Algebra di Cartan

Dato un'algebra di Lie \mathfrak{g} , la sua **SOTTOALGEBRA di CARTAN** è un sottospazio vettoriale $\mathcal{H} \subset \mathfrak{g}$ t.c.

$$[H_1, H_2] = 0 \quad \forall H_1, H_2 \in \mathcal{H}$$

La dimensione di \mathcal{H} , $r = \dim \mathcal{H}$, è detta **RANGO** di \mathfrak{g} .

Mettiamoci in una rep. R :

- Qui gli elem. di \mathfrak{g} sono rappresentati da **MATRICI**.
- Le matrici di \mathcal{H} commutano fra loro e quindi possono essere **SIMULTANEAMENTE DIAGONALIZZATE**.
- Scegliamo come base di V_R una base di autovettori $\{v_l\}_{l=1, \dots, d_R}$ comuni a tutte le matrici che rappresentano \mathcal{H} .

Allora

$$h_R v_l = \mu_{R,l}(h_R) v_l$$

↑
funzionali lineari su \mathcal{H} (detti PESI di R)

t.c. $\mu_{R,l}(h_R)$ è l'autovalore di h_R relativo all'autovettore v_l

- Se prendo una base $\{H^1, \dots, H^r\}$ di \mathcal{H} , mi basta sapere cosa fanno $\mu_{R,l}$ su h_R^i $i=1, \dots, r$

$$h_R^i v_l = \mu_{R,l}^i v_l$$

- $\mu_{R, \lambda} \in \mathbb{R}^+$. Al variare di R e λ qti vettori π -dimensionali si distribuiscono su un reticolo π -dim. $\Lambda_w(G)$ detto WEIGHT LATTICE.

- Quanto detto per una generica R vale in particolare per la rep AGGIUNTA ($\cong G$). In questo caso, i pesi vengono chiamati ROOTS α_i .
 Quante roots abbiamo? Uno direbbe $l=1, \dots, \dim G$. Tuttavia alcuni di qti vett. π -dim. sono triviali, in presenza i vettori H^1, \dots, H^r hanno autovalori nulli.

$$\rightarrow \#_{\text{roots}}^{\text{non-trivial}} = \dim G - r.$$

- Le roots spannano un reticolo, chiamato ROOT LATTICE $\Lambda_{\text{root}}(G)$

Es. $G = A_1$ con generatori S_x, S_y, S_z ; $r=1 \rightsquigarrow H = S_z$

$R = \underline{2}$ (doppietto) \rightsquigarrow autovalori di S_z : $\mu_{2,1} = \frac{1}{2}$ $\mu_{2,2} = -\frac{1}{2}$

$R = \underline{3}$ (tripletto) \rightsquigarrow autovalori di S_z : $\mu_{3,1} = 1$ $\mu_{3,2} = 0$ $\mu_{3,3} = -1$
 \uparrow rep. Adj $\# \text{ roots} \neq 0 = 3 - 1 = 2 \uparrow$

$R = \underline{4}$ \rightsquigarrow autovalori di S_z : $\mu_{4,1} = \frac{3}{2}$ $\mu_{4,2} = \frac{1}{2}$ $\mu_{4,3} = -\frac{1}{2}$ $\mu_{4,4} = -\frac{3}{2}$

- Se esponenziamo le sottoal. di Cartan, otteniamo un sottogruppo ABELIANO $U(1)^r$:
 $e^{i\beta^1 H^1} = e^{i\beta_1 H^1} \cdot e^{i\beta_2 H^2} \cdot \dots \cdot e^{i\beta_r H^r}$

LINE OPERATORS & GAUGE GROUP

Simmetria di GAUGE \leftrightarrow ridondanza nella descrizione della teoria



Solo grandezze GAUGE INVARIANT sono ben definite e pred. osservabili.

In QED \vec{E} e \vec{B} (o $F_{\mu\nu}$) sono gauge inv.; ma qto non è vero per le teorie non-ab. ($F_{\mu\nu} \rightarrow U F_{\mu\nu} U^\dagger$)

Se vogliamo costruire quantità gauge invarianti, dobbiamo lavorare con tracce, come $\text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho})$ o WILSON LINES.

WILSON LINES & WILSON LOOPS

Nel linguaggio matematico, A_μ è detta CONNESSIONE, Analogo a $\Gamma_{\mu\sigma}^s$ in Relatività Generale; lì era connessione su FIBRATO TANGENTE; qui A_μ è connessione su FIBRATO VETTORIALE generico, dove la FIBRA è V_R

$\Gamma_{\mu\sigma}^s$ ci dice come trasportare parallelamente i vettori lungo curve della varietà. A_μ fa lo stesso per i vettori di V_R .

Consideriamo un campo di $W_\mu(x)$ fissa e mettiamo in qto W_μ una particella-test. Qta particella è "carica" sotto il campo di W_μ . Per G semplice, qto vuol dire che la particella porta dei pred. di l.s. rappresentati da un vettore $w \in V_R$

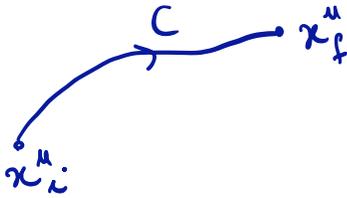
Prendiamo un vettore complesso $w \in V_R$ con $w^\dagger w = \text{cost.}$

La connessione ci dice come evolve qto vettore, mentre la particella come un percorso sullo spatio-tempo $x^\mu(\tau)$

$$i \frac{dw}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau} A_\mu w \quad \text{PARALLEL TRANSPORT EQUATION}$$

integrate

$$w(\tau_f) = \Omega(x_i, x_f; C) w(\tau_i)$$



$$\Omega(x_i, x_f; C) \equiv \mathcal{P} e^{i \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{dx^\mu}{d\tau} A_\mu(x(\tau))} = \mathcal{P} e^{i \int_{x_i}^{x_f} A}$$

"path ordering" ← qnd si espande l'exp l'ordine delle matrici

WILSON LINE

Sotto transf. gauge: \otimes

$A_\mu(x(\tau))$ è fic.

tempi antecedenti vanno a sinistra

$$\Omega(x_i, x_f; C) \mapsto U(x_i) \Omega(x_i, x_f; C) U^\dagger(x_f)$$

Se C è un loop ($x_f = x_i$), Ω ci dice come varia w dopo che la particella ha fatto un giro (HOLONOMY)

↳ Se facciamo una traccia su R , otteniamo qto che viene chiamato WILSON LOOP

$$W[C] = \text{tr}_R \Omega(x_i, x_i; C) = \text{tr}_R \mathcal{P} e^{i \oint_C A}$$

probe di cariche elettriche (autanal. di cartan in rep. R)

$W[C]$ è GAUGE INVARIANTE e dipende da

- R in cui è rappresentata la matrice $A_\mu = A_\mu^a t_R^a$;
- valori di A_μ lungo la curva C .

⊗ Vediamo come trasf. $1 + i A_\mu(x) \delta x^\mu$

Nota: $U(x) U^\dagger(x + \delta x) = U(x) (U^\dagger(x) + \partial_\mu U^\dagger(x) \delta x^\mu) = 1 + U \partial_\mu U^\dagger \delta x^\mu + \dots$

$$\begin{aligned} 1 + i A_\mu \delta x^\mu &\mapsto 1 + i (U A_\mu U^\dagger - i U \partial_\mu U^\dagger) \delta x^\mu = \\ &= 1 + U \partial_\mu U^\dagger \delta x^\mu + i U A_\mu U^\dagger \delta x^\mu \\ &= U(x) U^\dagger(x + \delta x) + i U(x) A_\mu U^\dagger(x + \delta x) \delta x^\mu + O(\delta x^2) \\ &= U(x) (1 + i A_\mu^{(x)} \delta x^\mu) U^\dagger(x + \delta x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1 + i A_\mu(x_0) (x_1 - x_0)^\mu) (1 + i A_\mu(x_2) (x_2 - x_1)^\mu) \dots (1 + i A_\mu(x_n) (x_n - x_{n-1})^\mu)$$

$$\mapsto U(x_0) (\dots) \cancel{U^\dagger(x_1)} U(x_1) (\dots) \cancel{U^\dagger(x_2)} \dots$$

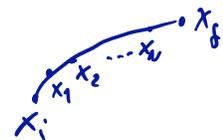
$$= U(x_0) (\dots) (\dots) \dots (\dots) U^\dagger(x_n)$$

$$P e^{\int_{x_1}^{x_2} A_\mu dx^\mu} = P \left(1 + A(x_1) + A(x_2) + \frac{1}{2} (A(x_1)^2 + A(x_2)^2 + \frac{A(x_1)A(x_2) + A(x_2)A(x_1)}{A(x_2)A(x_1)}) \right)$$

$A(x_1)$ e $A(x_2)$
in gen. non commutano

$$\begin{aligned} &= (1 + A(x_1) + A(x_2) + \frac{1}{2} (A(x_1)^2 + A(x_2)^2 + \underline{2 A(x_1)A(x_2)})) + \dots) \\ &= (1 + A(x_1)) (1 + A(x_2)) + \dots \end{aligned}$$

$$P e^{i \int_\gamma A_\mu dx^\mu} \sim P e^{i \sum_{j=0}^N A_\mu(x_j) \delta x^\mu}$$



$$\sim (1 + A_\mu(x_0) \delta x^\mu) (1 + A_\mu(x_1) \delta x^\mu) \dots$$

da trasf. come detto sopra.

WILSON LOOPS & CONFINEMENT

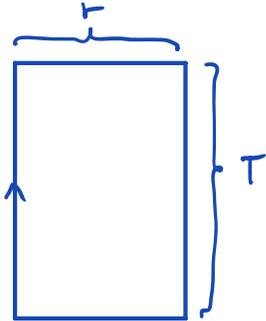
Define the Wilson Loop of

$$W[C] = \text{tr} P e^{i \oint_C A}$$

It's vev is given by:

$$\langle W[C] \rangle = \int \mathcal{D}A e^{-S_{YM}} \text{tr} P e^{i \oint_C A} \quad (\text{Euclidean P.I.})$$

Now, consider the explicit closed loop (FUNDAM. REP.)



Interpretation: creation, propagation and annihilation of a quark-antiquark pair

What behaviour do we expect for $\langle W[C] \rangle$?

Since W.L. is gauge inv. we can set a particular gauge: choose $A_0 = 0$.

- Integrals along vertical pieces are zero
- let's def. $M(t)_j^i \equiv \left[P e^{i \int_0^t dx' A_1(t, \vec{x})} \right]_j^i$

$$\Rightarrow \langle W[C] \rangle = \langle M(T)_j^i M^\dagger(0)_i^j \rangle$$

$$= e^{HT} M(0)_j^i e^{-HT}$$

- Remember that for long times (Eucl.) P.I. projects the system onto the lowest en. state

$$\langle q | e^{-HT} | q \rangle = \sum_n \langle q | E_n \rangle e^{-E_n T} \langle E_n | q \rangle \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \langle q | E_0 \rangle e^{-E_0 T} \langle E_0 | q \rangle$$

• Inserting complete set:

$$\langle W[C] \rangle = \sum_n e^{-TE_n(r)} \langle M(0)_j^i | n \rangle \langle n | M^\dagger(0)_i^j \rangle =$$

$$= \sum_n e^{-TE_n(r)} \left(\langle M(0)_j^i | n \rangle \right)^2 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \sim e^{-TE_0(r)} = V(r)$$

since charges are static

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \langle W[C] \rangle \sim e^{-V(r)T}$$

$$\text{or } V(r) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \langle W[C] \rangle$$

Now, in the CONFINING PHASE $V(r) \sim \sigma r$ and then we expect

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle W[C] \rangle \sim e^{-\sigma A[C]}$$

↑
AREA of C

→ AREA LAW CRITERION for confinement

If theory is not in confining phase, we get different behavior

When there is SCREENING, $V(r) \sim \text{const}$ (zero force)

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \langle W[C] \rangle \sim e^{-\frac{V_0}{2} P[C]}$$

↑
PERIMETER of C

One could suspect that in both cases one obtains:

$$\langle W[C] \rangle \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

However, infinities in $P[C]$ can be reabsorbed by a counterterm localized along C, contrary to $W[C]$.

$$W[C] \rightarrow W'[C] = W[C] e^{-\int_C ds}$$

→ $\langle W[C] \rangle = 0 \iff$ confining phase

$\langle W[C] \rangle \neq 0 \iff$ screening

→ W is order parameter for phase transition.

This may suggest the existence of a SYMMETRY that is spont. broken in one of the two phases.

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \langle W[C] \rangle \neq 0 \iff \lim_{|x-y| \rightarrow \infty} \langle O(x) O(y) \rangle \approx \langle O \rangle^2 \neq 0$$

↑
Sp. breaking of
some sym.

↑
Sp. breaking of
ordinary sym.

• • ← 0-dim space