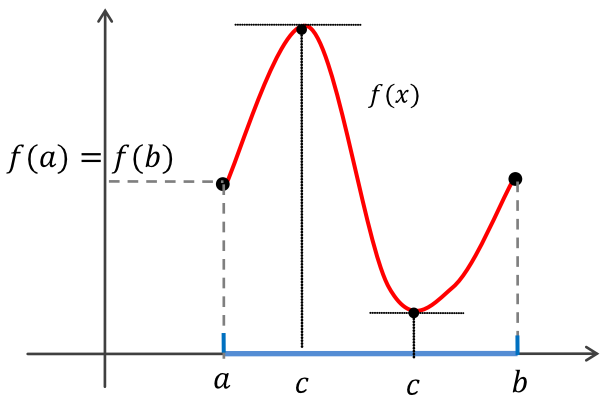
Teorema di Rolle

enunciato



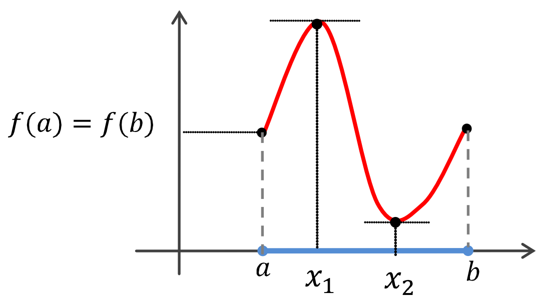
Se una funzione $f(x)$:

- è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$
- è derivabile nei punti interni dell'intervallo $]a, b[$
- assume valori uguali agli estremi dell'intervallo cioè $f(a) = f(b)$

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo $]a, b[$ in cui la derivata prima si annulla, cioè $\boldsymbol{f'(c) = 0}$

dimostrazione

la prima ipotesi del teorema di Rolle è la stessa del teorema di Weierstrass, per cui la funzione $f(x)$ ammette un massimo e un minimo assoluto nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$
Chiamiamo x_1 il punto di massimo e x_2 il punto di minimo assoluto. Si possono presentano tre casi:



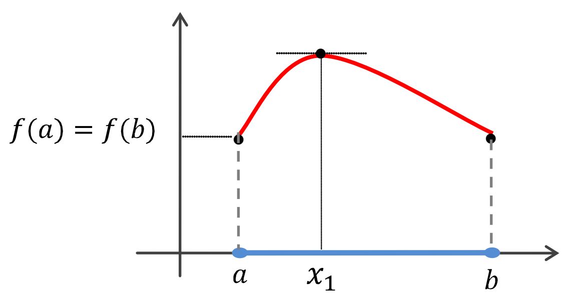
primo caso

entrambi i punti x_1 e x_2 sono interni all'intervallo $]a, b[$

Per il teorema di Fermat, se una funzione ha un massimo (o un minimo) in un punto, allora la derivata prima della funzione in quel punto (x_1 e x_2) è nulla, cioè:

$$\boldsymbol{f'(x_1) = 0 \quad \text{e} \quad f'(x_2) = 0}$$

da cui la tesi



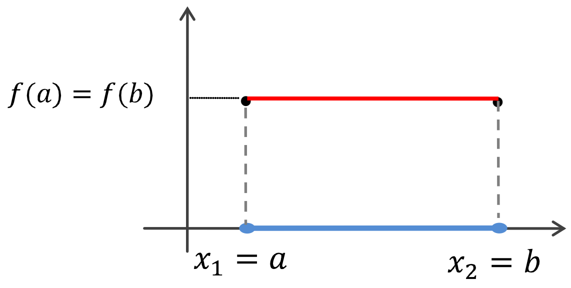
secondo caso

solo uno dei due punti x_1 o x_2 è interno all'intervallo $]a, b[$ ad esempio il punto di massimo x_1 e l'altro coincide con uno degli estremi

anche in questo caso per il teorema di Fermat, la derivata prima della funzione in x_1 è nulla, cioè:

$$\boldsymbol{f'(x_1) = 0}$$

da cui la tesi



terzo caso

entrambi i punti x_1 e x_2 sono agli estremi dell'intervallo $[a, b]$

Se $x_1 = a$ ed $x_2 = b$ allora la funzione sarà costante e quindi la sua derivata prima è nulla in tutti i punti dell'intervallo $]a, b[$, da cui la tesi

in sintesi: il teorema di Weierstrass assicura la presenza di un massimo e di un minimo assoluto nell'intervallo $[a, b]$ e in tali punti per il teorema di Fermat la derivata prima è uguale a zero