Ricordiamo il teorema di Cramer: se $A \in M_n(K)$ è invertibile e $b \in K^n$ è un qualsiasi elemento, allora il sistema lineare $AX = b$ ha sempre un'unica sol.: essa è $s = A^{-1}b$. Dalla formula dell'inversa tramite i cofattori segue che se scriviamo $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$, allora vale

sostituisco la i-esima colonna di A con il vettore b

$$s_i = \frac{\det\left(A^{(1)}, \dots, \overset{(i)}{b}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}\right)}{\det A} \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Applicazioni lineari

Def: siano V e V' due spazi vettoriali su K; una funzione
$$f : V \longrightarrow V'$$
si dice una *applicazione lineare* se valgono:

AL1. (additività) $\forall v_1, v_2 \in V$, vale
$$f(\underbrace{v_1 + v_2}_{\text{somma in } V}) = \underbrace{f(v_1) + f(v_2)}_{\text{somma in } V'}$$
"l'immagine della somma è la somma delle immagini"

AL2. (omogeneità) $\forall v \in V$ e $\forall \lambda \in K$ vale
$$f(\underbrace{\lambda \cdot v}_{\substack{\text{moltiplicazione per} \\ \text{uno scalare in } V}}) = \underbrace{\lambda \cdot f(v)}_{\substack{\text{moltiplicazione per} \\ \text{uno scalare in } V'}}$$
"l'immagine della moltiplicazione per uno scalare è la moltiplicazione per uno scalare dell'immagine".

Esempio: sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x + 2y$

vale che $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) =$
$$= (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) =$$
$$= (x_1 + 2y_1) + (x_2 + 2y_2) =$$
$$= f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$
dunque f è additiva; similmente si dimostra che f è omogenea.

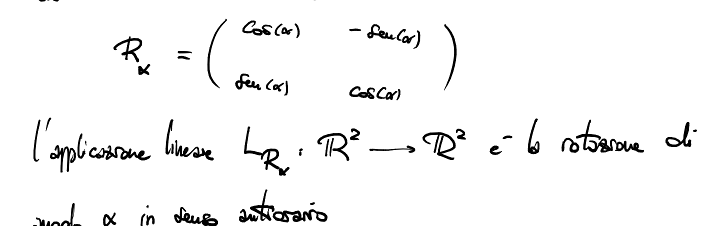
Def: sia $A \in M_{m,n}(K)$; allora A definisce una funzione
$$L_A : K^n \longrightarrow K^m$$
$$v \longmapsto Av$$
la funzione L_A associa a un vettore $v \in K^n$ il vettore $A \cdot v \in K^m$.

Prop: $\forall A \in M_{m,n}(K)$, la funzione L_A è un'applicazione lineare.

Dim: siano $v_1, v_2 \in K^n$, allora
$$L_A(v_1 + v_2) = A \cdot (v_1 + v_2) = A \cdot v_1 + A \cdot v_2 =$$
$$= L_A(v_1) + L_A(v_2)$$
similmente se $\lambda \in K$ e $v \in K^n$, vale $L_A(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot L_A(v)$.

Esempio: (rotazione nel piano di un angolo α in senso antiorario)

sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e consideriamo la matrice
$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$
l'applicazione lineare $L_{R_\alpha} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è la rotazione di angolo α in senso antiorario



$$L_{R_\alpha}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) \end{pmatrix}$$
$$L_{R_\alpha}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Def: (applicazioni lineari che "prendono le coordinate")

sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, $\dim V = n$; sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V; definiamo la funzione che prende *le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$* in questo modo: essa è una funzione
$$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n$$
che agisce nel modo seguente: se $v \in V$, allora possiamo scrivere in maniera unica v come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$:
$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n v_n \quad \text{con } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$
allora definiamo $F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$; si può verificare che $F_{\mathcal{B}}$ è un'applicazione lineare e che $F_{\mathcal{B}}$ è biiettiva (quindi è invertibile); si dice quindi che $F_{\mathcal{B}}$ è un *isomorfismo* di spazi vettoriali

Esercizio: provare che se $f : V \longrightarrow V'$ è un'applicazione lineare biiettiva, allora $f^{-1} : V' \longrightarrow V$ è anch'esso un'applicazione lineare.

Def: sia $f : V \longrightarrow V'$ un'applicazione lineare; definiamo il *nucleo* di f come il sottoinsieme
$$\ker f = \{v \in V : f(v) = 0\}$$
quindi $\ker f \subseteq V$; definiamo *l'immagine* di f come il sottoinsieme
$$\operatorname{im} f = \{v' \in V' : \text{esiste } v \in V \text{ tale che } f(v) = v'\}$$
quindi $\operatorname{im} f \subseteq V'$.

Prop: sia $f : V \longrightarrow V'$ un'applicazione lineare, allora $\ker f$ è sottospazio vettoriale di V e $\operatorname{im} f$ è sottospazio vettoriale di V'.

Dim: consideriamo per primo $\ker f$:

i. verifichiamo che $f(0) = 0$; vale infatti che
$$f(0) = f(0 + 0) \overset{AL1}{=} f(0) + f(0) \implies f(0) = f(0) + f(0)$$
$$\implies (\text{sommando } -f(0) \text{ a entrambi i membri}) \; f(0) = 0.$$
quindi $0 \in \ker f$

ii. siano $v_1, v_2 \in \ker f$, dobbiamo mostrare che $v_1 + v_2 \in \ker f$, ovvero che $f(v_1 + v_2) = 0$; per ipotesi $f(v_1) = 0$ e $f(v_2) = 0$; allora
$$f(v_1 + v_2) \overset{AL1}{=} f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0$$

iii. sia $v \in \ker f$ e sia $\lambda \in K$, dobbiamo mostrare che $\lambda \cdot v \in \ker f$, ovvero $f(\lambda \cdot v) = 0$; per ipotesi $f(v) = 0$, allora
$$f(\lambda \cdot v) \overset{AL2}{=} \lambda \cdot f(v) = \lambda \cdot 0 = 0$$
quindi $\ker f$ è sottospazio vettoriale.

consideriamo $\operatorname{im} f$:

i. vale che $0 = f(0)$, dunque $0 \in \operatorname{im} f$

ii. siano $v_1', v_2' \in \operatorname{im} f$, dobbiamo mostrare che $v_1' + v_2' \in \operatorname{im} f$; per ipotesi esistono $v_1, v_2 \in V$ tali che $v_1' = f(v_1)$ e $v_2' = f(v_2)$; quindi
$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = v_1' + v_2'$$
pertanto $v_1' + v_2'$ è immagine di un elemento di V, quindi $v_1' + v_2' \in \operatorname{im} f$

iii. sia $v' \in V'$ e $\lambda \in K$, sia $v' \in \operatorname{im} f$, dobbiamo mostrare che $\lambda \cdot v' \in \operatorname{im} f$; per ipotesi esiste $v \in V$ tale che $f(v) = v'$; quindi
$$f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) = \lambda \cdot v'$$
pertanto $\lambda \cdot v'$ è immagine di un elemento di V, quindi $\lambda \cdot v' \in \operatorname{im} f$.

dunque $\operatorname{im} f$ è sottospazio vettoriale.

Nucleo e immagine determinano due importanti proprietà di f come funzione.

Prop: sia $f : V \longrightarrow V'$ un'applicazione lineare; allora

1. f è iniettiva $\iff \ker f = (0)$
2. f è suriettiva $\iff \operatorname{im} f = V'$

Dim. 2. è una parafrasi del concetto di suriettività

1. "$\implies$" supponiamo f iniettiva e dimostriamo che $\ker f = (0)$; per farlo, consideriamo $v \in \ker f$ e mostriamo che deve essere $v = 0$; dato che $v \in \ker f$, abbiamo $f(v) = 0$; d'altra parte $f(0) = 0$; dato che f è iniettiva, ciò è possibile solo se $v = 0$.

"$\Leftarrow$" supponiamo $\ker f = (0)$ e mostriamo che f è iniettiva; per farlo, consideriamo $v_1, v_2 \in V$ tali che $f(v_1) = f(v_2)$ e mostriamo che $v_1 = v_2$; se vale $f(v_1) = f(v_2)$, allora $f(v_1) - f(v_2) = 0$, quindi (uso AL1/2)
$$f(v_1 - v_2) = 0 \quad (\text{perché } f(v_1) - f(v_2) = f(v_1) + f(-v_2) = f(v_1 - v_2))$$
dunque $v_1 - v_2 \in \ker f$, pertanto, dato che $\ker f$ è dato in questo caso dal solo elemento neutro, abbiamo $v_1 - v_2 = 0$, ovvero $v_1 = v_2$

Teorema: (teorema di struttura per applicazioni lineari)

siano V e V' due spazi vettoriali su K di dimensione finita (non è necessario che V e V' abbiano la stessa dimensione!); sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e siano $v_1', \dots, v_n' \in V'$ vettori qualsiasi (non c'è alcuna restrizione: potrebbero essere anche tutti uguali e/o tutti nulli); allora esiste un'unica applicazione lineare
$$f : V \longrightarrow V'$$
tale che $f(v_i) = v_i'$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dim: supponiamo che una tale applicazione lineare esista; sia $v \in V$ (vogliamo capire chi sia $f(v)$); per ipotesi, $\mathcal{B}$ è una base di V, quindi v si scrive in maniera unica come $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$; allora
$$f(v) = f(\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n) \overset{AL1}{=} f(\lambda_1 v_1) + \dots + f(\lambda_n v_n) =$$
$$\overset{AL2}{=} \lambda_1 \cdot f(v_1) + \dots + \lambda_n \cdot f(v_n) = \lambda_1 v_1' + \dots + \lambda_n v_n'$$
quindi l'immagine di $v \in V$ è univocamente determinata dalle proprietà che abbiamo supposto essere vere per f; pertanto, se f esiste, essa è unica; dobbiamo ora mostrare che f esiste; per farlo usiamo il suggerimento che ci è dato dall'argomento usato appena qui sopra, ovvero, se $v \in V$, definiamo $f(v)$ nel modo seguente: scriviamo v come combinazione lineare in modo unico di $\mathcal{B}$, dunque $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$ e definiamo
$$f(v) = \lambda_1 \cdot v_1' + \dots + \lambda_n \cdot v_n'$$
avendola definita in questo maniera, segue immediatamente che
$$f(v_i) = v_i' \quad \text{per ogni } i \in \{1, \dots, n\}$$
infatti $v_i = 0 \cdot v_1 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + 0 \cdot v_n$, quindi
$$f(v_i) = 0 \cdot v_1' + \dots + 1 \cdot v_i' + \dots + 0 \cdot v_n' = v_i'$$
l'ultima cosa che dobbiamo mostrare è che f, così definita, è una applicazione lineare; siano quindi $u, v \in V$, dobbiamo mostrare che
$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$
scriviamo u e v come combinazioni lineari di $\mathcal{B}$:
$$u = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$
$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$
da ciò segue che vale
$$f(u) = \mu_1 v_1' + \dots + \mu_n v_n', \quad f(v) = \lambda_1 v_1' + \dots + \lambda_n v_n'$$
inoltre
$$(u + v) = (\mu_1 + \lambda_1) v_1 + \dots + (\mu_n + \lambda_n) v_n$$
quindi
$$f(u + v) = (\mu_1 + \lambda_1) v_1' + \dots + (\mu_n + \lambda_n) v_n' =$$
$$= (\mu_1 v_1' + \dots + \mu_n v_n') + (\lambda_1 v_1' + \dots + \lambda_n v_n')$$
$$= f(u) + f(v)$$
pertanto f è additiva; analogamente si dimostra che f è omogenea.

Esempio: consideriamo in $\mathbb{R}^2$ la base standard $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
consideriamo in $\mathbb{R}^2$ i due elementi
$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
allora per il teorema di struttura delle applicazioni lineari esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che
$$f(e_1) = w_1 \quad \text{e} \quad f(e_2) = w_2$$
chiediamoci: chi è l'immagine attraverso f di un generico elemento $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$?

vale che $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$; allora $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x \cdot w_1 + y \cdot w_2$

quindi
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

Esempio: non può esistere un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \end{pmatrix}.$$