Applicazioni lineari

Oss: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V; allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono un sistema di generatori di $\operatorname{im} f$; infatti se $v' \in \operatorname{im} f$, allora esiste $v \in V$ tale che $v' = f(v)$; dato che $\mathcal{B}$ è base, vale che $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ per certi $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, quindi

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = f(\lambda_1 v_1) + \dots + f(\lambda_n v_n)$$
$$= \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$$

quindi v' è combinazione lineare di $f(v_1), \dots, f(v_n)$; notiamo che abbiamo usato solo il fatto che $\mathcal{B}$ è un sistema di generatori per V.
sintetizzando: "le immagini di un sistema di generatori sono un sistema di generatori per l'immagine dell'applicazione lineare".

Oss: consideriamo una matrice $A \in M_{m,n}(K)$; allora abbiamo

$$L_A : K^n \longrightarrow K^m$$
$$v \longmapsto A \cdot v$$

se in K^n prendiamo la base standard $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$, dove

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (i)$$

allora vale che $A \cdot e_i = A^{(i)}$; dato che $\mathcal{E}$ è una base di K^n, abbiamo che

$$\operatorname{im} L_A = \operatorname{span}(L_A(e_1), \dots, L_A(e_n))$$
$$= \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$$

pertanto $\dim \operatorname{im} L_A = \dim \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \operatorname{rg} A$

Def: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita, definiamo il <u>rango di f</u> come $\dim \operatorname{im} f$

Data l'osservazione precedente, il rango di un'applicazione lineare è una generalizzazione del rango di una matrice.

Teorema: (teorema di dimensione per applicazioni lineari)
sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita; vale allora

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$$

o, in altre parole

$$\dim V = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$$

Dim: sia $n = \dim V$ e fissiamo una base $\mathcal{B}_{\ker}$ di $\ker f$; sia $\mathcal{B}_{\ker} = \{v_1, \dots, v_k\}$, dunque $\dim \ker f = k$; ora, per costruzione $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti, dunque essi possono essere estesi a una base di V (teorema di estensione); sia essa

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{\text{base di } \ker f}, \underbrace{v_{k+1}, \dots, v_n}_{n-k \text{ vettori}}\}$$

raggiungiamo il nostro scopo se riusciamo a mostrare che $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$ è una base di $\operatorname{im} f$, perché in tal caso abbiamo che $\dim \operatorname{im} f = n-k$ e dunque $\dim V = n = k + (n-k) = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$;
dimostriamo dunque che $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$ è una base di $\operatorname{im} f$;

- cominciamo mostrando che tali elementi sono linearmente indipendenti; supponiamo quindi che esista una loro combinazione lineare nulla:

$$a_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + a_n f(v_n) = 0 \quad \text{per certi } a_{k+1}, \dots, a_n \in K$$

allora, dato che f è lineare

$$f(a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n) = 0$$

allora $a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n \in \ker f$, quindi

$$a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_k v_k$$

per certi $b_1, \dots, b_k \in K$ dato che $\{v_1, \dots, v_k\}$ è una base del nucleo pertanto

$$-b_1 v_1 - \dots - b_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n = 0$$

e questa è una combinazione lineare nulla di $\{v_1, \dots, v_n\}$, la quale è una base di V e pertanto l'unica possibilità è che sia

$$-b_1 = 0, \dots, -b_k = 0, \ a_{k+1} = 0, \dots, a_n = 0$$

quindi in particolare $a_{k+1} = 0, \dots, a_n = 0$, e dunque $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

- dimostriamo che $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$ sono un sistema di generatori per $\operatorname{im} f$; dall'osservazione precedente sappiamo che $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è un sistema di generatori per $\operatorname{im} f$ dato che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V.
d'altro canto, dato che $v_1, \dots, v_k \in \ker f$:

$$\{\underset{0}{\underset{\|}{f(v_1)}}, \dots, \underset{0}{\underset{\|}{f(v_k)}}, f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$$

pertanto $\operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = \operatorname{span}(f(v_{k+1}), \dots, f(v_n))$, pertanto $\operatorname{im} f = \operatorname{span}(f(v_{k+1}), \dots, f(v_n))$. □

Esempio: supponiamo che $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ sia un'applicazione lineare; allora sappiamo che sicuramente f non può essere suriettiva; infatti per il teorema di dimensione abbiamo

$$\dim \operatorname{im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f \leq 3$$

mentre $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ e quindi non potrà mai essere che $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^4$

Oss: sia $A \in M_{m,n}(K)$ e consideriamo il sistema lineare omogeneo $A \cdot X = 0$; interpretiamo le sue sue soluzioni in termini dell'applicazione lineare L_A:

$$\{\text{soluzioni di } A \cdot X = 0\} = \{s \in K^n : A \cdot s = 0\}$$
$$= \{s \in K^n : L_A(s) = 0\}$$
$$= \ker L_A$$

Cor: sia $A \in M_{m,n}(K)$, allora la dimensione del sottospazio vettoriale $W \subseteq K^n$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ è uguale a $n - \operatorname{rg} A$
(questo colma il vuoto lasciato nella dimostrazione del teorema di struttura per sistemi lineari arbitrari).

Dim: abbiamo visto che $W = \ker L_A$; per il teorema di dimensione, ricordando che $L_A : K^n \to K^m$, abbiamo

$$\dim K^n = \dim \ker L_A + \dim \operatorname{im} L_A \implies$$
$$\implies n = \dim W + \operatorname{rg} L_A$$
$$= \dim W + \operatorname{rg} A$$
$$\implies \dim W = n - \operatorname{rg} A$$

Oss: sia $A \in M_{m,n}(K)$, consideriamo $L_A : K^n \to K^m$; dato $b \in K^m$, interpretiamo che cosa significhi dire che $b \in \operatorname{im} L_A$; vale che

$$b \in \operatorname{im} L_A \iff \text{esiste } s \in K^n \text{ tale che } L_A(s) = b$$
$$\iff \text{esiste } s \in K^n \text{ tale che } A \cdot s = b$$
$$\iff \text{il sistema lineare } AX = b \text{ è compatibile.}$$

Cor: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi di dimensione finita e supponiamo $\dim V = \dim V'$; allora le seguenti condizioni sono equivalenti:
1. f è iniettiva
2. f è suriettiva

Dim: $1. \Rightarrow 2.$ supponiamo f iniettiva, allora $\ker f = (0)$, allora dal teorema di dimensione

$$\dim V = \underbrace{\dim \ker f}_{=0} + \dim \operatorname{im} f$$

quindi $\dim \operatorname{im} f = \dim V = \dim V'$, pertanto $\operatorname{im} f \subseteq V'$ e questi due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione, pertanto $\operatorname{im} f = V'$ e dunque f è suriettiva

$2. \Rightarrow 1.$ supponiamo f suriettiva, allora $\operatorname{im} f = V'$, allora dal teorema di dimensione

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$$
$$= \dim \ker f + \dim V'$$
$$\implies \dim \ker f = 0 \implies \ker f = (0) \implies f \text{ è iniettiva}$$

Cor: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita, e sia $\dim V = \dim V'$, allora

$$f \text{ iniettiva} \iff f \text{ è suriettiva} \iff f \text{ è biiettiva}$$
$$\iff f \text{ è invertibile}$$

Introduciamo ora un'operazione che associa a un'applicazione lineare (tra spazi di dimensione finita) una matrice.

Def: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita sia $\mathcal{B}$ una base di V e sia $\mathcal{C}$ una base di V'; siano

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \qquad \mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$$

definiamo la <u>matrice associata ad f rispetto alle basi</u> $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ come la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \in M_{m,n}(K)$ ottenuta nella maniera seguente:

per ogni $v_i \in \mathcal{B}$, scriviamo $f(v_i)$ come combinazione lineare di $w_1, \dots, w_m$; i coefficienti di tale combinazione formano la colonna i-esima di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$; in altre parole

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \text{coordinate di } f(v_1) \text{ risp. a } \mathcal{C} & \cdots & \text{coordinate di } f(v_n) \text{ risp. a } \mathcal{C} \end{pmatrix}$$

Esempio: consideriamo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

e consideriamo la base standard $\mathcal{E}$ sia per il dominio che per il codominio (quindi nella definizione prendiamo $\mathcal{B} = \mathcal{E}$ e $\mathcal{C} = \mathcal{E}$)
per costruire $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ dobbiamo calcolare $f(e_1)$ ed $f(e_2)$, dove

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed esprimerli nella base $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$

$$f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

esprimiamo $f(e_1)$ ed $f(e_2)$ nella base $\{e_1, e_2\}$:

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$$

pertanto

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esempio: sia $f: V \to V'$ l'applicazione nulla, ovvero $f(v) = 0 \ \forall v \in V$; per qualsiasi scelta di basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{C}$ di V' vale che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

quindi la matrice associata all'applicazione nulla è la matrice nulla, qualsiasi base noi scegliamo.

Esempio: sia $f: V \to V$ l'applicazione identica, ovvero $f(v) = v \ \forall v \in V$. scegliamo una base $\mathcal{B}$ per V e scegliamo $\mathcal{C} = \mathcal{B}$; se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ allora $f(v_i) = v_i = 0 \cdot v_1 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + 0 \cdot v_n$, quindi

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_n$$

quindi la matrice associata all'applicazione identica rispetto alla stessa base nel dominio e nel codominio è la matrice unità.

Teorema: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita; sia $\mathcal{B}$ una base di V e sia $\mathcal{C}$ una base di V'; sia $v \in V$ e supponiamo che $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ siano le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ (ovvero $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$), quindi $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n$;
allora le coordinate di $f(v)$ rispetto a $\mathcal{C}$ sono date da $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

Dim: la dimostrazione segue dalle definizioni.

Teorema: siano $f: V \to V'$ e $g: V' \to V''$ due applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita e siano $\mathcal{B}$ una base di V, $\mathcal{C}$ una base di V', $\mathcal{D}$ una base di V''
allora possiamo considerare $g \circ f: V \to V''$ e abbiamo

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(g \circ f) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(g) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$$

Cor: sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ basi di V, allora

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_V \circ id_V) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_V) = \mathbb{1}_n$$

quindi $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)$ è l'inversa di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V)$.