Dirac quantization condition

Consideriamo un MONOPOLO MAGNETICO, cioè oggetto che è sorgente di un campo magnetico

$$\bar{B} = \frac{q_m \hat{r}}{4\pi r^2} \qquad \text{t.c.} \quad \int_{S^2} \bar{B}\cdot d\bar{\Sigma} = \underset{\text{"carica magnetica"}}{\underset{\uparrow}{q_m}}$$

→ modifica di legge di Maxwell $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$. Di solito qta è considerata "non negoziabile". Infatti, se $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} \neq 0$ $\bar{B}$ non può essere scritto come $\bar{\nabla}\times\bar{A}$ e $\bar{A}$ è necessario per la descrizione quantistica di una particella elettricam. carica in campo magnetico.

qto non è propriamente vero: possiamo definire $\bar{A}$ su tutti i pti diversi da qlo in cui sta q_m e MQ è ben definita

(Vedi DIRAC MONOPOLE)

Vediamo come def. questo campo $\bar{A}$. Innanzitutto escludiamo l'origine dal dominio di $\bar{A}(x)$ (like gauge fields sourced by electric charge)

$$\bar{A} : \underbrace{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}_{\text{some non-trivial topology}} \to \mathbb{R}^3$$

Prendiamo campo $\bar{A}$ con $A_\phi^N = \frac{q_m}{4\pi r}\,\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ (o) $\quad A_r = 0 = A_\theta$

$$\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A} = \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\phi \operatorname{sen}\theta\right)\hat{r} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\big(\underbrace{rA_\phi}_{\text{it does not depend on } r}\big)\hat{\theta} \overset{!}{=} \frac{q_m \hat{r}}{4\pi r^2}$$

(o) è singolare a $\theta = \pi$, cioè al polo sud.

La connessione $A_\phi^S = -\frac{q_m}{4\pi r}\,\frac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ è regolare a $\theta=\pi$, ma sing. a $\theta = 0$

Come possiamo dare una connessione ben definita su tutto $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$?

↳ notiamo che $\bar{A}^N = \bar{A}^S + \bar{\nabla}\omega$, cioè sono gauge equiv.

per $\theta \neq 0, \pi$ (dove almeno una delle due connessioni è mal definita)

$$A_\phi^N = A_\phi^S + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \partial_\phi \omega \qquad \text{dove} \qquad \omega = \frac{q_m \phi}{2\pi}$$

permette di "incollare" le due connessioni

È lecita qta trasf. di gauge?

La funzione ω non è single-valued, è un problema?

Sotto gauge transf. $\varphi \mapsto \underbrace{e^{i q_e \omega}}_{\text{qto deve essere single-valued}} \varphi$

se φ ha carica elettrica q_e

avviene se $\dfrac{q_e q_m \cdot \cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}} = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

Dirac quantiz. condition: $q_e \cdot q_m \in 2n\mathbb{Z}$

(Matem.: costruzione di un $U(1)$-bundle non-triviale; n è chiamato 1st Chern number.)

't Hooft Lines in Elettromagnetismo

Prendiamo un MONOPOLO che percorre cammino C in $\mathbb{R}^{3,1}$. Per ogni S^2 che circonda C abbiamo

$$\int_{S^2} \bar{B} \cdot d\bar{\Sigma} = q_m \quad (*) \qquad q_m \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{(DIRAC QUANTIZATION)}$$

se cariche elettriche normalizzate a essere intere.

Affinché A_μ soddisfi qta equazione, bisogna imporre condizioni al bordo ($r \to 0$) singolari per A_μ.

Definiamo l'operatore "'t Hoof line" $T[C]$ imponendo che i campi su cui facciamo il Path Integral soddisfino la condizione (*).

def. inusuale per un operatore, ma questo ci permette comq di calcolare le funz. di correlaz di $T[C]$ con ogni altro op. O

$$\langle T[C]\, O\rangle = \int_{A \text{ satisfy } (*)} O(A)\, DA$$

't Hooft lines in Yang-Mills

- Consideriamo curva di tipo tempo C, che passa per origine
- $B^i = \epsilon^{0ijk} F_{jk}$ soddisfa $B^i \to \frac{x^i}{4\pi r^3} Q$ per $r \to 0$

In Adj di $\mathfrak{g}$ (gruppo G)

a valori nell'alg. di Lie

specifica la "carica magnetica"

Di nuovo copriamo S^2 con due carte e prendiamo Q cost. in ogni carta, che possiamo ruotare a un elem. della sottoalg. di Cartan

$$Q = \bar{q}_m \cdot \bar{H} \qquad q_m^i \to \text{cariche magnetiche}$$

$i = 1, \dots, r$

$\bar{H} = (H^1, \dots, H^r)$ base di Cartan subalg.

Le H^i generano sottogruppi $U(1)$, che avranno associate cariche ELETTRICHE, cioè autovalori di H^i (weights)

La richiesta che le linee di 't Hooft siano consist. con la presenza di "cariche elettriche", cioè Wilson lines

$\to$ Dirac quant. cond: $\exp(\bar{q}_m \cdot \bar{\mu}_R) = \mathbb{1}$ $\quad \forall R$ in cui mettiamo qu. Hi

Definiamo l'operatore "'t Hooft line" $T[C]$ imponendo che i campi su cui facciamo il Path Integral soddisfino la condizione $(*)$.

def. inusuale per un operatore, ma questo ci permette comunque di calcolare le funz. di correlaz. di $T[C]$ con qualsiasi altro op. O

$$\langle T[C]\, O \rangle = \int_{A \text{ satisfy } (*)} O(A)\, \mathcal{D}A$$

't Hooft lines in Yang-Mills

Consideriamo l'alg. di Cartan $\subset \mathcal{G}$.

- Un elemento $H \in \mathcal{H}$ genera un sottogruppo $U(1)_H \subset G$.
- Prendiamo una base $\{H^1, \dots, H^r\} \equiv \bar{H}$ di $\mathcal{H}$. Ad ogni generatore è associato un sottogruppo $U(1)$.
- Per ognuno di questi gruppi $U(1)$ posso pensare di prendere un monopolo di carica q_m^I $\quad I = 1, \dots, r$, con campo magnetico

$$\bar{B}^I = \frac{q_m^I}{4\pi r^2}\hat{r} \rightsquigarrow$$ posso def. 't Hooft line op. richiedendo che la sua inserzione nel P.I. produca questo andamento per $r \to 0$.

$\bar{B}^I$ è embeddato in Field strength non-ab. come

$$B_i = \epsilon_{ijk} F^{jk} = \epsilon_{ijk} F^{a\,jk} t^a \underset{\uparrow}{=} \epsilon_{ijk} F^{I\,jk} H^I = \underline{B_i^I H^I}$$

Consideriamo F in Cartan subalg.

$$\rightarrow \quad \bar{B}^I H^I = \frac{\hat{r}}{4\pi r^2} \quad q_m^I H^I$$

- Prese particelle in rep R di G, le loro cariche sotto $U(1)_{H^I}$ sono date da $\mu_\ell^I \equiv \mu_\ell(H^I)$ $\ell = 1, \dots, \mathrm{im} V_R$.

  Def. $\bar{\mu} = (\mu^1, \dots, \mu^r)$

- Ripetiamo step del caso abeliano per la soluz. di monopolo:

  → abbiamo che i due emisferi di S^2 sono incollati se $\omega^I = \frac{q_m^I \phi}{2\pi}$ genera una buona trasf. di gauge.

  Qto avviene se $e^{i\omega^I H^I}$ è ben definita quando agisce su ogni rep. R di G.

  $(\bar{\mu}_R = n_\ell \bar{\mu}_{\ell, R})$

  Cioè se $e^{i \frac{q_m^I}{2\pi} \phi \mu_R^I}$ è periodica per $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$

  → Dirac quantization condition:

$$\bar{q}_m \cdot \bar{\mu}_R \in 2\pi \mathbb{Z} \qquad (*)$$

  ⇝ dati i pesi $\bar{\mu}_R \in \Lambda_w$ le cariche magnetiche permesse sono solo quelle che soddisfano (*).

Es. $SU(2)$. L'alg. di Cartan è 1dim ⇝ $U(1) \subset SU(2)$.

- I pesi sono $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.
- La carica magn. deve soddisfare $q_m \mu = 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$
- Siccome la minima carica elettrica è $1/2$ (corrispondente alla rap. fondamentale), allora $q_m \in 4\pi \mathbb{Z}$.

I pesi e le roots hanno la proprietà

$$\frac{2\,\bar{\alpha}\cdot\bar{\mu}}{\bar{\alpha}^2} \in \mathbb{Z} \qquad (\#)$$

- Usiamo qta proprietà per risolvere la Dirac quantization cond., cioè $\bar{q}_m \cdot \bar{\mu} \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \forall \bar{\mu} \in \Lambda_w(G)$.

- Definiamo "co-root" $\bar{\alpha}^\vee \equiv \frac{2\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2}$ $\rightsquigarrow$ spannano un reticolo che chiamiamo $\Lambda_{co\text{-}root}(G)$

- $(\#) \Rightarrow \quad \bar{\alpha}^\vee \cdot \bar{\mu} \in \mathbb{Z} \quad \forall \bar{\alpha}^\vee \in \Lambda_{co\text{-}root}(G)$ e $\bar{\mu} \in \Lambda_w(G)$.

$\hookrightarrow$ Le cariche magnetiche stanno in:

$$\bar{q}_m \in 2\pi\,\Lambda_{co\text{-}root}$$

$\leftarrow$ Qta condizione è detta "GNO quantization cond."

Goddard-Nuyts-Olive

Nota: $\Lambda_{co\text{-}root}(G)$ può essere visto come il root lattice di un'algebra di Lie $G^\vee$: $\Lambda_{co\text{-}root}(G) = \Lambda_{root}(G^\vee)$.

Per le algebre ADE vale $G^\vee = G$!

$SU(N)$ vs $SU(N)/\mathbb{Z}_N$ $\qquad$ $SU(2)$ vs $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3)$

- Wilson lines labelled da reps R di G.
- 't Hooft lines " da elem. di $\Lambda_{\text{co-root}}(G) \subset \Lambda_w(g^\vee)$

Consideriamo YM con $G = SU(N)$.

$A_\mu \in \text{Adj} \rightarrow$ non sentono trasf. del centro $\mathbb{Z}_N \subset SU(N)$

$$\mathbb{Z}_N = \{ e^{2\pi i k/N} \mathbb{1} \mid k = 0, 1, \dots, N-1 \}$$

Abbiamo lo stesso spettro di bosoni di gauge se $G = SU(N)/\mathbb{Z}_N$.

In generale, ci sono DIVERSE TEORIE di GAUGE con gruppo

$$G = SU(N)/\mathbb{Z}_p \qquad \mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Z}_N$$

$\leftarrow$ Gruppi di Lie con stessa alg. di Lie.

La differenza è sottile:

- l'azione dip dall'alg. di Lie, che è la stessa per i diversi gruppi;
- $\langle \mathcal{O} \dots \mathcal{O} \rangle$ con $\mathcal{O}$ op. locali sono le stesse nelle diverse teorie $\rightarrow$ i correlatori di op. locali non permettono di distinguere le teorie.

Vediamo le WILSON LINES: esse sono labellate da reps di G.

- Le rep di $SU(N)/\mathbb{Z}_N$ sono un sottoinsieme di quelle di $SU(N)$

  $\rightarrow$ ogni rep che trasforma in maniera non triviale sotto $\mathbb{Z}_N$ è proibita (due elem. equivalenti non possono agire in maniera diversa)

  qto limita il numero di Wilson lines.

Se abbiamo meno rep., stiamo escludendo weights $\vec{\mu}$ e quindi aumentiamo il numero di cariche magnetiche ammissibili

In particolare per $SU(N)$ $\quad g = g^\vee$ cioè $\Lambda_{co\text{-}root} = \Lambda_{root}$

$G = SU(N)/\mathbb{Z}_N$ $\quad \bar{\mu}$ stanno in Λ_{root} $\Rightarrow$ $\bar{q}_m$ stanno ora in Λ_w

- C'è una corrispondenza 1 a 1 tra reps e pti in $\Lambda_w(g)/W$ dove W è il Weyl group (un gruppo discreto che agisce su H^* e che è dato per ogni alg. di Lie).
- Inoltre $\Lambda_w(g)/\Lambda_{root}(g) = \underset{\uparrow \text{ centro}}{\mathbb{Z}_N}$

$\downarrow$

I pesi (mod Weyl) che non stanno nel root lattice possono essere labellati da un intero $z^e \in \{0,1,\dots,N-1\}$

$\longrightarrow$ per gti ci sono WL, ma non TL in $SU(N)$

Analogamente per $SU(N)/\mathbb{Z}_N$, i pesi a cui posso associare TL ma non WL sono labellati da $z^m \in \{0,1,\dots,N-1\}$

Prendiamo come es. $SU(6)$; qui posso fare diverse scelte di gruppo di gauge

$SU(6)$ $\quad \bar{\mu} \in \Lambda_w$ $\quad \bar{q}_m \in \Lambda_{root}$

$\left.\begin{array}{l} SU(6)/\mathbb{Z}_2 \\ SU(6)/\mathbb{Z}_3 \end{array}\right\}$ $\bar{\mu} \in \Lambda_e$ $\quad \bar{q}_m \in \Lambda_m$ $\leftarrow$ Qui non ho che un reticolo è incluso nell'altro, ma in entrambi ci sono pti che non appartengono all'intersezione

$SU(6)/\mathbb{Z}_6$ $\quad \bar{\mu} \in \Lambda_{root}$ $\quad \bar{q}_m \in \Lambda_w$

Per es $SU(6)/\mathbb{Z}_2$: $z^e = \{0,2,4\}$ $z^m = \{0,3\}$ e posso fare operatori con (z^e, z^m) combinando WL e TL ops.

Are $\mathbb{Z}_N$ labels related to QUANTUM NUMBERS?
(i.e. charges under some sym)

Yes : 1-form symmetry

Extra: Angolo θ e Witten effect

← da leggere a fine corso

Un θ-termine genera una carica elettrica per un monopolo.
↳ Witten effect

$$q = \frac{e\theta}{2\pi}$$

← Nota che per $\theta = 2\pi$, $q = e$ e posso considerare bound state di monopolo + positrone e ottenere un monopolo scarico elettricam.

⇓

Quando $\theta \in \,]0, 2\pi[$ un monopolo è sempre carico anche elettricamente

Witten effect due to the fact that a monopole generates some bndry cond. at its location ⇝ this produces effect if we have a bndry term in $\mathcal{L}$.

↓

Torniamo a 't Hooft line operators.

Dato un line op. con cariche (z^e, z^m), la presenza del θ-term shifta la carica elettrica:

$$\theta \mapsto \theta + 2\pi \quad \Rightarrow \quad (z^e, z^m) \mapsto (z^e + z^m, z^m) \qquad (\star)$$

- Per $G = SU(N)$, $(\star)$ mappa il reticolo di line ops su se stesso.
- Per $G = SU(N)/\mathbb{Z}_N$, $(\star)$ cambia lo spettro dei line ops.

$\Rightarrow$ la teoria con $G = SU(N)/\mathbb{Z}_N$ cambia.

Lo spettro ritorna su sé stesso quando lo shift è
$\theta \mapsto \theta + 2\pi N$

In altre parole $\theta \in [0, 2\pi N[$

Un modo di capire che $\theta \in [0, 2\pi[$ in $SU(N)$ YM è che $\int F F^*$ è quantizzato b.c.

$$e^{-S_\theta} = e^{i\theta n} \qquad \underline{\underline{n \in \mathbb{Z}}} \quad \Rightarrow \text{P.I. periodico in } \theta \to \theta + 2\pi.$$

instanton number

Dire che $\theta \simeq \theta + 2\pi N$ indica che dovremmo trovare istantoni con quantizzaz. razionale in teorie con $G = SU(N)/\mathbb{Z}_N$. Infatti qto avviene

($SU(N)/\mathbb{Z}_N$ bundles hanno più connessioni di gli $SU(N)$)