Calcolo dei predicati

Introduzione e traduzioni (introduzione)

Si consideri il seguente argomento:

Tutti gli umani sono mortali.

Socrate è umano.

Quindi, Socrate è mortale.

- Questo argomento è intuitivamente valido.

- Sembra impossibile che le premesse siano vere, ma la conclusione falsa.

- Ci aspetteremmo quindi di confermare questo nella nostra logica.

Ad esempio:Traduciamolo nel *linguaggio proposizionale* e ricaviamo la conclusione dalle premesse, secondo le nostre regole.

- Se non si riesce a trovare una derivazione formale, si puo` provare a controllare l’argomento con le tavole di verità.

- Ma entrambe le strategie danno esito negativo.

- Anzi, con le tavole di verita`, la nostra logica proposizionale ci dice che l'argomentazione sopra non è valida!

- Ciò significa forse che questo e altri argomenti simili **non** sono **validi**?

- Siamo costretti a considerare questo e altri simili argomenti **non corretti**?

- No.

- Ricordate: all’inizio abbiamo detto che un argomento e` valido se istanzia almeno una forma valida.

- Ma sappiamo che ogni argomento ha molte forme, tra cui solitamente anche alcune o molte invalide.

- Quindi potrebbe ben essere che l’argomento e` valido, ma noi non siamo in grado, con la nostra logica, di trovare la forma valida.

- Abbiamo anche detto che per essere sicuri di cogliere la forma valida conviene dare la forma piu` analizzata.

- Ma allora, forse se andassimo piu` a fondo cattureremo quella forma valida.

- E infatti e` proprio cosi`. E per questo ci serve una logica a grana piu` sottile, che e` la logica predicativa.

- In altre parole, questa non è una prova che l'argomento non è valido.

  → Al contrario, mostra che la nostra logica proposizionale, quella che abbiamo sviluppato finora, è limitata.

  La logica proposizionale è troppo debole. E` in grado di catturare solo alcune forme valide.

- Per rendere giustizia alla validità di questo tipo di argomenti, dobbiamo quindi sviluppare strumenti più complessi.

- Ci serve un modello formale che riesca a catturare anche la struttura interna degli enunciati atomici.

    (O almeno quella parte di struttura interna che e` rilevante per la validita` logica).

In questo modo otteniamo la l**ogica dei predicati**, o **predicativa**, o **del prim’ordine**.

Logica dei predicati

- Per analizzare la struttura interna delle proposizioni dobbiamo essere in grado di catturare la forma logica interna alle proposizioni atomiche.

- Prendiamo l’enunciato atomico:

  Socrate è mortale.

  → Nel linguaggio proposizionale sarebbe resa come: P

- Nella logica dei predicati vogliamo poter fare di piu`.

  Vogliamo evidenziare che si parla di un individuo, *Socrate*, che ha una certa proprietà, *la mortalita*`.

- Quindi dividiamo la frase distinguendo la cosa di cui si parla (‘Socrate’),

  e cio` che si dice di lui, (il predicato ‘e` mortale’) come segue:

Socrate   /   è mortale.

Piu` brevemente, usando ‘s’ per *Socrate* e ‘M’ per *essere mortale* scriviamo: *M(s)*

Oppure: Ms

- Chiaramente, avremmo potuto usure altre lettere, ad esempio, ‘q’ (sempre per Socrate) e R (sempre per essere mortale)

  Ottenendo: R(q)

- Esattamente come nel linguaggio proposizionale possiamo scegliere liberamente le lettere enunciative (P, Q o altro).

- Dobbiamo solo essere coerenti.
  - Nella stessa argomentazione dobbiamo usare gli stessi simboli per dire la stessa cosa.
  - Una volta fissati, nell’argomento, i simboli rimangono gli stessi.

- Abbiamo quindi bisogno di simboli per gli individui, ovvero per le entita`, le cose di cui parliamo.

  p,q,r,s,...

  E di simboli per i predicati, che stanno per proprieta` o relazioni di quelle cose:

  P( ),Q( ), R( ), S( ),...

Esercizio:

Si formalizzi (usando le risorse a disposizione finora):

Napoleone e` francese.

Cesare era un grande generale.

Flash e` il supereroe piu` veloce.

- Si consideri ora:

  Giulietta ama Romeo.

- Se usiamo ‘g’ per Giulietta, ‘r’ per Romeo e ‘A’ per amare, abbiamo:

  gAr oppure   A(g,r)

- Si noti che se volessimo dire che

  Romeo ama Giulietta.

  Scriveremmo:

  rAg oppure A(r,g)

  Scambiando l'<u>ordine</u> di 'r' e 'g'.

- Questo vuol dire che:

1. Il predicato amare ‘A’ ha 2 posti.

Si applica cioe` a due individui, non solo a uno (come ‘e` mortale’).

2. NB: Quando piu` di un individuo e` coinvolto, l’<u>ordine</u> conta.

Meglio quindi parlare non di due individui, ma di una <u>coppia ordinata</u> di individui.

- Ovviamente, anche piu` di due individui possono essere coinvolti.

Otello e` geloso di Desdemona e Cassio.

Viene:

G(o,d,c)

Dove l’ordine di nuovo, conta. Abbiamo cioe` una **tripla** ordinata.

→ Similmente per predicati a 4, 5, 6, … n posti.

I predicati ad 1 posto indicano **proprieta`**.

I predicati a piu` di un posto (2,3, 4, …, n) indicano **relazioni**.

Siccome nelle nelle relazioni l’ordine conta, alle relazioni avremo associate coppie, triple, … ordinate.

Nota anche che, come nel caso proposizionale, diverse formalizzazioni dello stesso enunciato sono possibili, a seconda di quanto si vuole analizzare.

Romeo ama Giulietta.

Si puo` anche formalizzare come:  A(r) che sta per: *Romeo ha la proprieta` di amare Giulietta*.

Oppure A(g): *Giulietta ha la proprieta` di essere amata da Romeo*.

→ Gli enunciati atomici (e le lettere enunciative) possono anche essere visti come predicati a 0 posti.

Come di consueto, noi ci atterremo alla prassi di analizzare il piu` possibile, per essere sicuri di cogliere la forma valida.

Concetti e funzioni

- La notazione:

  P(s)

  al posto di: s è P

  viene delle funzioni in matematica, dove scriviamo $f(x)$.

- L'idea di applicare questo approccio funzionale alla struttura degli enunciati naturali è un altro grande contributo di Frege.

→ Lo si può trovare, ad esempio, nell'articolo di Frege: *Concetto e funzione*.

- Le funzioni hanno argomenti per cui danno valori.

  Ad esempio la funzione binaria +(x,y), se applicata a 3 e 5 da` valore 8 +(3,5)=8

  (ovvero 3=5=8)

- In questo senso, possiamo dire che la funzione ‘e` mortale’ da` il valore **vero** quando applicata all’argomento ‘Socrate’.
- Se il vero lo indichiamo con ‘1’, possiamo scrivere: M(s) = 1

- Siccome dire che *e' vero che Socrate e` mortale* e` equivalente a dire che *Socrate e` mortale*, possiamo abbreviare M(s) = 1 come M(s), che e` quel che abbiamo fatto.

Variabili individuali

Quando scriviamo:

Rosso(x), oppure P(y) o R(z) $\rightarrow$ P(y)

per cosa stanno le **variabili individuali** x,y,z,...?

- Stanno per individui, per cose come i nomi, ma **non** indicano un individuo determinato, ma qualcuno o qualcosa non determinato.

Rosso(x) e` un po’ come dire ‘Mr. x e` rosso’.

Dovremmo sapere chi e` Mr.x, sapere se e` vero o no.

- Quindi le variabili possono stare per un individuo,

  ma perche` lo facciano bisogna **assegnargli un valore**, ovvero assegnargli provvisoriamente un individuo o una cosa.

  (questo lo faremo nella semantica)

Enunciati complessi

- Possiamo anche combinare l’analisi di enunciati atomici con i nostri simboli proposizionali.

- Ad esempio:

  Socrate ***non*** *è mortale.*

  nel linguaggio proposizionale è:

  -P

  ma siccome ora possiamo analizzare anche la struttura interna di P, abbiamo

  -M(s)

- Analogamente per gli altri connettivi.

Socrate è mortale e Nanchino non è in Cina.

$P(s)$ & $-Q(r)$

Se Socrate non è mortale, allora Nanchino è in Cina e Andrea è felice.

$-P(s) \rightarrow (Q(r)$ & $R(t))$

Analogamente, si possono ottenere funzioni, e quindi predicati, anche da enunciati complessi.

Roma e` grande e la neve e` bianca.

G(r) & B(n)

Ci puo` dare, per astrazione, una funzione a due posti:

G(x) & B(y)

Oppure:

$F(x,y)\ \&\ -R(z)$

$T(y) \rightarrow (T(x) \vee R(y))$

…

Si provi a sostituire le variabili con termini singolari, in modo da ottenere enunciati completi e quindi valutabili.

Identita`

Un predicato importante e` quello di identita`. Ovvero la relazione di essere identico. Relazione che ogni cosa ha con se stessa e con nient'altro.

E` una relazione a due posti e la indicheremo sempre con '='.

=(x,y) vuol dire che x e` identico a y.

La scriveremo, per comodita`, come x=y.

Quantificatori

Ogni cosa/tutti

- Consideriamo l'altra premessa dell'argomento introdotto in precedenza:

Tutti gli umani sono mortali.

È molto difficile formalizzare questo enunciato.

Procediamo per gradi.

Sappiamo come analizzare: *Socrate è mortale*:

M(s)

Ma come formalizzare:

Tutti sono mortali.

(o ‘*ogni cosa e` mortale*’) ?

- Una tentazione potrebbe essere:

  P(o)

  dove "o" sta per "ogni cosa".

  → **MA QUESTO È SBAGLIATO!**

- Socrate è una persona specifica. Con un corpo, una personalità, ecc.

  Un uomo specifico chiamato "Socrate".

- Ma **ognuno** NON è una persona specifica (con un corpo, una personalità, ecc.).

  → Non esiste un uomo chiamato "tutti" o “ognuno”.

- Quando diciamo che *tutti sono mortali*, NON significa che una certa persona chiamata

  "tutti", è mortale.

- Ciò che intendiamo è: Socrate, Andrea, Chen, ecc.

  Qualunque umano si prenda è mortale.

- Potremmo allora provare con

  M(x)

  Usando la variabile.

- Visto che x non e` una cosa determinata, questo ci mette sulla strada giusta.

  Ma non e` ancora sufficiente.

- Tutti sono mortali, non vuol dire che un qualche oggetto singolo, anche se non specificato, e` mortale.

- Quello che vogliamo dire e`: non importa come si specifichi x, come Andrea, Luca, Gabriella, …

  Chiunque si prenda e` mortale.

- Ovvero, chiunque sia x, x e` mortale.

- Quindi possiamo leggere *tutti sono mortali*.

  Come qualcosa del genere:

  Chiunque sia x, x è mortale.

- Oppure

  Per ogni x, x e` mortale.

- Ovvero:

se x = *Socrate*, allora Socrate
è mortale.

Se x= Andrea, allora Andrea è mortale

– Se x=Socrate, allora Socrate è mortale...
se x = …

e così via, per tutti gli individui.

- Utilizzando alcuni simboli possiamo scrivere:

- *Per ogni x, P(x)*

Dove ‘P(x)’ significa "x è mortale".

- Possiamo anche usare un simbolo per "per tutti" o “per ogni”.

$\forall$

che è la "A" di “All” ("Tutto" in Inglese) capovolta.

- *Tutti gli x sono mortali*.

diventa quindi:

$\forall x P(x)$

→ Chiaramente, "Tutti", "Tutti", "tutto", “ogni”,”ciascuno’, ecc. hanno qui lo stesso significato logico. Quindi sono tutti tradotti con "∀".

- C'è però ancora una complicazione.

  Con $\forall x P(x)$ non abbiamo tradotto:

  Tutti gli umani sono mortali

  ma:

  Tutti sono mortali.

- "ogni cosa e` mortale" significa che anche la tavola e le stelle sono mortali. Ogni cosa!

- Ma noi vogliamo solo dire che è mortale cio` che e` umano.

La nostra affermazione è valida solo se x è umano.

- Allora possiamo dire:

  Per ogni x, se x è umano, allora x è mortale.

Formalizzato,

Tutti gli umani sono mortali.

Viene;

$\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x))$

- Altro esempio:

  Tutti i Cinesi sono asiatici.

  Abbiamo:

  Per ogni x (se x è Cinese, allora x è asiatico).

  $\forall x\ (C(x) \rightarrow A(x))$

- Nota,

  *Per ogni x, se x è **asiatico**, allora x è **Cinese**.*

  ha un significato diverso!

  Significa che *tutti gli asiatici sono Cinesi*!

- Provate a tradurre quanto segue:

Tutti i gatti sono neri.

Ogni amico è felice.

Ogni estate è calda.

- Possiamo anche avere casi più complessi.

Tutti *non sono* alti.

$\forall x \ -T(x)$

- Che vuol dire: *nessuno (o niente) e` alto*.

- *Non tutti sono Cinesi:*

$-\forall x\ (P(x) \rightarrow C(x))$

Che vuol dire: *qualcuno non e` cinese*.

Tutti i cani sono buffi o non grandi.

$\forall x\ (D(x) \rightarrow (F(x)\ v\ -B(x))\ \ )$

- Nota che abbiamo questo tipo di struttura:

$C \ \rightarrow (F\ v\ -\ B)$

- Ora consideriamo:

Nessun gatto è un uccello.

- Possiamo nuovamente esprimere questa frase utilizzando “per ogni" e "non":

Per ogni x, se x è un gatto, x non è un uccello.

$\forall x\ (C(x) \rightarrow -B(x))$

- Perché non è formalizzato in questo modo:

$\forall x\ (-C(x) \rightarrow B(x)\ )$?

La differenza sta nella posizione della negazione.

Questo significa:

Tutti i non-gatti sono uccelli.

- Altri esempi:

  Formalizzate queste frasi da soli:

  Nessuna donna è mortale.

  Niente è felice.

  Tutti i cinesi non sono giapponesi.

  Nessun cinese è giapponese.

Qualcosa

- Ora consideriamo:

  Qualcosa e` buono.

  → Anche in questo caso, non possiamo formalizzarlo in questo modo:

  G(q).

  - Perché NON significa che esiste un oggetto specifico, chiamato "qualcosa", che è buono.

- Il significato è piuttosto quello di:

  Tra le cose, ce n’e` almeno una buona.

- Oppure: C’e` *almeno una cosa buona.*

  Esiste almeno un x, tale che x è buono.

Possiamo abbreviare questo introducendo un nuovo simbolo:

"∃" (cioè la "E" di "esiste" invertita).

e scrivere:

$$\exists x \, G(x)$$

- "∃" è chiamato quantificatore particolare o esistenziale.

- “Esistenza” non e` un predicato...

- Ora consideriamo:

Alcune persone sono cinesi.

Significa:

Esiste almeno un x, tale che:

x è una persona e x è cinese.

$\exists x\ (P(x)\ \&\ C(x))$

MOLTO IMPORTANTE!

- Si notino le diverse formalizzazioni quando il *quantificatore universale* e *particolare* sono coinvolti!

Tutti gli animali sono mortali ---> $\forall x\ (A(x) \rightarrow M(x))$

Alcuni animali sono mortali ---> $\exists x\ (A(x)\ \&\ M(x))$

- Nel primo caso si utilizza →, nel secondo caso usiamo & !

Tutti gli animali sono mortali

- non può essere tradotto con &, come:

$\forall x\ A(x)\ \&\ M(x)$

---> Perché questo significa che ogni cosa è *sia* animale *che* mortale!

- Considerate ora:

Alcune persone non sono cinesi.

- Significa:

Esiste un certo x, tale che x è una persona,
e x non è cinese.

$\exists x\ (P(x)\ \&\ -C(x))$

Considerate:

Non esiste un gatto che vola.

- Significa:

Non esiste un x, tale che x sia un gatto *e* x vola.

$-\exists x\ (C(x)\ \&\ F(x))$

- Che vuol dire:

  Nessun gatto vola.

- Ma abbiamo pero` tradotto “nessuno” usando il quantificatore universale!

  Quindi, questo ci suggerisce che i quantificatori universale e particolare sono interdefinibili.

  Si veda il prossimo caso.

- Consideriamo:

Non esiste una cosa non materiale.

Significa:

- *Non esiste un x, tale che x non sia materiale.*

$-\exists x\ -M(x)$

- Ma se NON esiste una cosa che sia NON materiale,

  allora:

  tutto è materiale!

  $\forall x \, M(x)$

- E infatti le seguenti formalizzazioni sono equivalenti:

$$-\exists x\ -M(x)$$

e

$$\forall x\ M(x)$$

- Questo è vero in generale e ci fa vedere come i due quantifcatori potrebbero essere ridotti l’uno all’altro.

  "Tutto" equivale a:

  non c'è una cosa che non sia...

  ∀**x** è equivalente a **-∃x -.**

Viceversa:

Esiste

è equivalente a

Non tutto non è

$\exists x$ è equivalente a: $-\forall x$ -

- Quindi, potremmo scegliere un solo quantificatore e introdurre l'altro per definizione.

  Averli entrambe e` ridondante.

- Tuttavia, per semplicità, li adotteremo entrambe.

- Quantificatori iterati

- In alcuni casi, più di un quantificatore e` coinvolto.

- Considerate:

  – *Tutto* ha *un* creatore.

- Significa:

  per *ogni x*, *esiste almeno un y*, tale che y è il creatore di x.

  Formalmente:

  $\forall x \exists y\ C(y,x)$

- NOTA!

- L'ordine dei quantificatori è importante!

$\exists y\ \forall x\ C(y,x)$ ha un significato diverso.

Quale?

Significa che *c'è almeno una* cosa che è il creatore di ogni cosa.

→ Per esempio un unico Dio.

- Pensate alla differenza.

- Se dico:

  Ogni uomo ama una donna.

- Può avere, in Italiano, due significati:

1.

C'è (almeno) una donna in particolare (Sophie, per esempio),

e ogni uomo ama Sophie.

Questo significato è dato da questo ordine di quantificatori:

$\exists y \; \forall x \; (...)$

2.

Ogni uomo ama almeno una donna.

Ovvero, uomini diversi magari amano donne diverse.

- Un uomo ama Sophie, un uomo ama Marie, Un uomo ama Rachel, un uomo ama (di nuovo) Sophie, , ecc...

Questo significato è dato da questo ordine di quantificatori:

$\forall x \; \exists y \; (...)$

Si noti che il linguaggio naturale è spesso ambiguo in questo rispetto.

Il nostro linguaggio logico lo corregge, evitando l’ambiguita`.

- Chiaramente, possiamo anche avere più di un quantificatore di un certo tipo.

  Più di un quantificatore universale, più

  di un quantificatore esistenziale, o piu` di entrambe.

FINE INTRODUZIONE