# Logica dei predicati

## Semantica

- Come abbiamo visto, le tavole di verità non sono sempre sufficienti per catturare la validità di un argomento di logica predicativa.

- Quindi, abbiamo bisogno di un linguaggio piu` complesso, di cui abbiamo visto vocabolario e sintassi.
- Ora dobbiamo fornirlo di una **semantica**.

- Consideriamo anzitutto gli **enunciati atomici**.

- Nella logica proposizionale il loro significato si esauriva in un valore di verita`.

- Ora dobbiamo dare un significato anche ad ogni componente degli enunciati atomici (**termini singolari** e **predicati**).

- I **termini singolari** e i **predicati** hanno ruoli sintattici diversi e dovranno avere una semantica diversa.

- Inoltre i termini singolari stessi sono di tipi diversi (in particolare **costanti** e **variabili individuali**).

- Se il significato non e` dato solo dai valori di verita`  {0,1}, da cosa e` dato?

  Cosa ci serve al posto di {0,1}?

- Ci serve una struttura piu` complessa (chiamata anche **modello**) formata da:

  1. Un **dominio D** e
  2. Una **interpretazione I**.

# Dominio

- Il **dominio** e` l’universo di discorso del nostro linguaggio.

- Sono le cose di cui il linguaggio parla.

- Il dominio del linguaggio predicativo non e` fissato una volta per tutte.

- Il dominio puo` anzi essere scelto in modo arbitrario come un qualunque insieme (non vuoto) di oggetti.

- Perche` non e` fissato una volta per tutte?

  Perche`, per la validita` vogliamo considerare **tutti i casi possibili**…

  … quindi universi in cui ci sono solo gatti, universi esattamente come il nostro, universi in cui c’e` solo un libro e tre arcobaleni, eccetera.

- Il dominio D e` quindi dato da un qualsiasi insieme non vuoto di elementi.

  Ad esempio:

  $D_1$: {Colosseo, torre di Pisa, Duomo di Milano}

  $D_2$: {2, 4, 6, 8, 10}

  $D_3$: {Superman, Batman Wonderwoman, Catwoman}

  $D_4$ : {Colosseo, 2, Catwoman}

  $D_5$ : L’insieme degli elettroni di questo tavolo

  … eccetera.

- Si noti che il dominio puo` esser molto piccolo

  Ma **non** vuoto. Di qualcosa bisogna pur parlare. Deve quindi contenere almeno un oggetto.

- Ma anche molto grande. Infinito (di varie cardinalita`)

  Ad esempio potremmo avere come dominio D l'insieme di tutti i numeri naturali.

# Interpretazione I

- L’interpretazione I e` l’analogo delle valutazioni v del linguaggio proposizionale.

  → Nel linguaggio proposizionale v associava 1 o 0 a ogni lettera enunciativa. I valori semantici erano solo i valori di verita`.

- Per L1, I interpreta il linguaggio **non** logico (quindi termini singolari e predicati), dando un valore semantico, ovvero un significato a tali espressioni del nostro linguaggio.

- Quindi l’interpretazione I deve associare qualcosa del dominio alle costanti, e qualcosa (di tipo diverso) ai predicati.

- Per le variabili ci servira` un terzo elemento oltre il dominio e l’interpretazione, ovvero l’**assegnazione**.

- Come le valutazioni del linguaggio proposizionale, le interpretazioni possono essere viste come funzioni.

# Semantica delle **costanti individuali**

- Le **costanti individuali** hanno il ruolo inteso di nomi.

  Quindi come significato gli si dara` **un elemento del dominio**.

- La funzione di interpretazione I assocera` quindi uno ed un solo elemento del dominio per ogni costante individuale.

  (I potrebbe pero` associare lo stesso oggetto a nomi diversi.)

- Ad esempio se il dominio e`

$D_4$ : {Colosseo, 2, Catwoman}

Una funzione $I_1$ puo` interpretare le costanti m,n,o cosi`:

$I_1(m)$= Colosseo

$I_1(n)$= 2

$I_1(o)$= Catwoman

Nell’interpretazione $I_1$, quindi ‘m’ sara` un nome del Colosseo, ‘n’ del numero ‘2’, e ‘o’ della supereroina Catwoman.

Ovviamente altre interpretazioni sono possibili. Possiamo dare una interpretazione diversa, ad es. $I_2$, in cui ‘o’ e` il nome del Colosseo e ‘m’ e` il nome di Catwoman.

Oppure altre interpretazioni ancora.

Per ogni dominio abbiamo molte interpretazioni.

Quindi avremo **molti possibili domini** e, per ognuno di essi, **molte possibili Interpretazioni**.

Quindi molti possibili modelli.

Un **modello** M e` un dominio D con un'interpretazione I.

M = (D,I)

Avremo quindi molti possibili modelli.

# Semantica dei **predicati a 1 posto**

(Proprieta`)

La semantica dei predicati puo` sembrare piu` difficile.

Qual e` il significato di un predicato?

Come facciamo a dargli un significato potendo scegliere solo tra le cose in un dominio?

La risposta e` dare un **trattamento insiemistico** dei predicati.

Ovvero si associa ad ogni predicato un insieme di cose che sono quelle a cui il predicato si applica correttamente.

Ad esempio, in Italiano, “e` amico di Andrea” corrisponde all’insieme dei miei amici.

Al predicato Italiano “e` rosso” corrisponde l’insieme delle cose rosse.

Il significato di un predicato non e` quindi un oggetto ma un **insieme di oggetti**.

In particolare, dato un dominio D, il significato di un predicato di L1 e` un sottoinsieme di D.

**Nota 1:** si ricordi, dalla teoria degli insiemi, che i *sottoinsiemi* non sono (per forza) *elementi* dell’insieme di cui sono sottoinsiemi.

**Nota 2:** si ricordi anche che c’e` differenza tra Socrate e {Socrate}.

Il primo e` un filosofo, il secondo un insieme.

Esempio di interpretazione di predicati a 1 posto.

Sia $D_3$: {Superman, Batman, Wonderwoman, Catwoman}

E si considerino i predicati (a un posto) P( ), Q( ), R( ).

Per interpretarli dobbiamo assegnargli un sottoinsieme di elementi di $D_3$.

Come nel caso delle costanti, vi sono molte diverse interpretazioni possibili.

Diverse interpretazioni (e quindi diversi modelli) assoceranno diversi sottoinsiemi ai vari predicati.

Ad esempio, se $D$ = {Colosseo, 2, Catwoman}I, un'interpretazione $I_1$ dei predicati $P()$,$Q()$, $R()$ puo` essere:

$I_1(P)$ = {Superman, Batman}

$I_1(Q)$ = {Wonderwoman, Catwoman}

$I_1(R)$ = {Superman}

Semantica dei **predicati a n posti**

(Relazioni)

Come trattare  i predicati a piu` posti?

Abbiamo visto che tali predicati stanno per relazioni.

Ad esempio “Ama(Romeo,Giulietta)” sta per la relazione di amore di Romeo verso Giulietta.

Quindi il significato di un predicato a due posti non sara` un insieme di elementi, ma un insieme di **coppie di elementi**.

(Ad esempio, l’insieme delle coppie di elementi in cui il primo ama il secondo)

L’interpretazione di un predicato a due posti sara` quindi un **insieme di coppie ordinate** di elementi del dominio.

(Formalmente, un sottoinsieme del prodotto cartesiano D X D)

Ad esempio, indicando con (a,b) la coppia ordinata di formata da a e b, se S e` un predicato a due posti, possiamo avere:

$I_1(S)$ = {(Catwoman, Colosseo), (2, Colosseo)}

Chiaramente, altre interpretazioni sono possibili. incluse quelle che non hanno una lettura intuitiva, esattamente come quella appena data.

Che razza di relazione e` quella espressa da $I_1$?

Non importa. E` una relazione perche` vale tra coppie ordinate di elementi.

Poi, essendo una relazione strana, e forse inutile, il linguaggio naturale non l'ha mai registrata e quindi non abbiamo espressioni in Italiano o concetti per quella relazione.

(mentre abbiamo il concetto, ad esempio di amore)

In modo simile, i predicati a tre posti saranno insiemi di **triple** ordinate, a **quattro** posti di quadruple, eccetera.

# Semantica delle variabili

# Assegnazione

Una variabile e` un termine singolare che sta per un elemento del dominio.

Non essendo una costante, non gli si potra` pero` associare un elemento una volte per tutte.

L'elemento per cui sta una variabile (il valore della variabile) deve poter variare,deve poter essere appunto variabile.

Per farlo abbiamo bisogno di dargli un significato provvisorio. Anzi di potergliene dare di diversi, tutti provvisori.

Per falro, introduciamo la nozione di assegnazione, che e` una attribuzione di valore a una variabile, ma di tipo provvisorio.

Ovvero, l’assegnazione e` simile all’interpretazione delle costanti, nel senso che associa a ogni variabile un elemento del dominio, ma non e` fissata una volta per tutte come l’interpretazione.

Ovvero, un modello ha una sola Interpretazione ma non avra` solo una assegnazione, ma molte. Proprio perche` deve poter cambiare.

Una assegnazione g e` una funzione che associa a ogni variabile un elemento del dominio.

NB: Ogni modello puo’ essere accompagnato da molte assegnazioni.

Ad esempio, sia M un modello in cui il dominio e`
D = {Colosseo, 2, Catwoman}

(e magari le costanti ‘m’,’n’,’o’ sono interpretate da $I_1$ in
D cosi`:

I(m)= Colosseo
I(n)= 2
I(o)= Catwoman)

M e` accompagnato da molte diverse possibili assegnazioni g di valori alle variabili.

Abbiamo anzi tutte le infinite possibili assegnazioni per ogni modello.

(Infinite perche`, anche se D e` finito, le variabili sono comunque infinite)

Ad esempio, abbiamo:

$g_1(x)=2$,

$g_1(y)=$Colosseo,

$g_1(z)=2$,

$g_1(w)=$Catwoman, …

Un’altra:

$g_2(x)=$Colosseo, $g_2(y)=2$, $g_2(z)=$Catwoman, $g_2(w)=2$, …

Un’altra:

$g_3(x)=$ …

Quindi il significato di una **costante** in un modello e` relativo a una interpretazione I che la interpreta una volta per tutte.

Il significato di una variabile in un modello e` relativa, all’interno di ogni modello, a una certa assegnazione.

Ricordando che le assegnazioni non sono fisse, ma ogni modello ne ha infinite.

# Significato e Verita`

*Vero in un modello*

Abbiamo dato significato alle costanti e ai predicati.

Ma non abbiamo dato significato alla loro composizione, ne` agli altri simboli del linguaggio.

I simboli (logici) a cui non abbiamo ancora dato significato sono i connettivi e i quantificatori.

Lo facciamo ora, definendo quando gli **enunciati atomici** sono **veri in un modello**,

e poi determinando come i simboli logici contribuiscono a determinare la verita` o falsita` in un modello di un **enunciato complesso**.

Perche` diamo il significato usando la verita`?

Ci potrebbe sembrare che per dire quando un’ affermazione e` vera dovremmo sapere cosa significa.

Qua invece facciamo il contrario: diciamo cosa significa dicendo quando e` vera!

Due motivi.

1. Ci interessa la validita` logica. E per quello ci interessa solo se premesse e conclusione sono vere o false. Non di cosa parlano (come nel caso proposizionale). La logica e` formale, non riguarda il contenuto.

2. Abbracciamo la tesi per cui conoscere il **significato** di un enunciato e` **sapere a che condizioni esso e` vero**.

Significato = condizioni di verita`

Questa idea della natura del significato deriva dal lavoro di Frege e Wittgenstein ed ha solide basi.

E` la posizione tradizionale ovvero il paradigma dominante della filosofia del linguaggio.

Inoltre, si e` rivelato un approccio molto proficuo anche per lo studio delle lingue naturali.

La moderna semantica formale e` un applicazione di questa idea e dell'approccio logico alle lingue naturali.

Con una formulazione ricorsiva (che ripercorre quella data per la dfinizione di fbf)

Daremo quindi:

Le condizioni a cui un enunciato **atomico** e` *vero in un modello*.

Le condizioni a cui un **enunciato che contiene un connettivo** e` vero *in un modello* (cosa che stabilira` il significati di quel connettivo)

Le condizioni a cui un **enunciato quantificato** e` vero *in un modello*.

Nota che si parla sempre di verita` ***in un modello*** (anche se a volte lo lasceremo sottointeso),

perche` solo in un modello termini e predicati sono interpretati.

Inoltre, in modelli diversi i simboli potrebbero esser interpretati diversamente e quindi anche la verita` e falsita` potrebbe cambiare.

# Soddisfazione

Sebbene il punto di arrivo sia definire la verita` in un modello, il grosso del lavoro lo la fa una nozione simile a quella di verita`, ma leggermente diversa.

Quella di **soddisfazione**.

La **verita`** riguarda **enunciati** (fbf senza variabili libere), la **soddisfazione** riguarda anche **formule aperte** (fbf con variabili libere).

La verita` degli enunciati sara` un caso particolare della soddisfazione di fbf in generale.

Siccome nella **soddisfazione** si considerano anche variabili libere, che non hanno un valore determinato, si dovra` sempre anche specificare una **assegnazione**.

Quindi, in un modello, una fbf sara` soddisfatta o non soddisfatta da una certa assegnazione.

Quello che vogliamo definire e` **quando una assegnazione soddisfa** una fbf.

Il motivo per cui si passa per le formule aperte e per la soddisfazione, invece di dare subito la definzione di verita` e1 che

per poter dare le clausole dei quantificatori. (direttamente con la verita` non si riuscirebbe).

Clausole semantiche

**Soddisfazione di formule atomiche aperte**

Idea intuitiva...

## 1. Soddisfazione di formule atomiche

Sia ‘$A^n(v1, \ldots, vi, c1, \ldots, cj)$’ , dove $i+j = n$, una formula in cui occorrono n termini singolari, di cui i variabili e j costanti (con sia i che j che possono essere uguali a zero)

(Ovvero, ci sono n termini singolari, e tra questi alcuni possono essere variabili individuali e altri costanti);

Sia g una assegnazione di valori alle variabili di L1.

Allora

g **soddisfa** ‘$A^n(v_1, \ldots, v_i, c_1, \ldots, c_j)$’ sse

$(g_M(v_1), \ldots, g_M(v_i), I_M(t_1), \ldots, I_M(t_j)) \in I_M(P^n)$.

Anche se la formulazione sembra complessa, l’idea e` banale.

Si consideri il mondo reale,

e si interpreti R con l’insieme di cose rosse (intuitivamente R vuol dire *e` rosso*)

Si consideri poi l’enunciato R(t).

R(t) e` vero se l’oggetto per cui sta t (quindi interpretato), e` nell’insieme delle cose rosse, che abbiamo associato a R.

R(t) e` vero o falso (nel modello inteso?)

Sara` vero se quello per cui sta ‘t’ e` una cosa rossa. Ovvero e` nell insieme di cose rosse.

Dove l’insieme di cose rosse e` il valore attribuito da I a ‘R( )’.

Ovvero, R(t) e` vero sse il valore di t (cioe I(t) appartiene al valore di R( ), cioe`a I(R( ))

La clausola sopra e` una generalizzazione di questa semplice idea al caso in cui ci siano piu` costanti e variabili.

Con l'osservazione che, potendo esserci variabili, dobbiamo anche considerare l'assegnazione. Quindi non avremo solo I(t) ma anche g(v).

Ma l'idea e` la stessa anche per le variabili. (se assegna a 'x' una cosa rossa, allora R(x) e` soddisfatta dall'assegnazione g).

La soddisfazione di un formula atomica dipendera` quindi dal modello (**dominio** e **interpretazione** del predicato delle costanti della formula in esso)

e dall'**assegnazione** considerata delle variabili.

Quindi possiamo definire la nozione di soddisfazione di una formula atomica da parte di una assegnazione g, come fatto sopra.

## Soddisfazione di enunciati - Verita`

(Ovvero formule atomiche chiuse)

Notiamo cosa succede se non ci sono variabili nella formula aperta, ma solo costanti individuali.

$F(c_1, \ldots, c_j)$.

In questo caso, la definizione di soddisfazione (che usiamo per **tutte** le fbf, anche se era motivata dal poter trattare quelle aperte) ci dice che una assegnazione g, in un modello M, soddisfa $F(c_1, \ldots, c_j)$,

se i valori dati da g alle variabili e l'interpretazione delle costanti appartengono all'interpretazione di 'F( )'.

Siccome pero` **non ci sono variabili**, **la soddisfazione dipende interamente dall'interpretazione delle costanti e del predicato F**.

Se i valori delle costanti appartengono al valore di F, allora l'assegnazione soddisfa la formula, banalmente.

(Banalmente, perche` l'assegnazione non deve fare niente per ottenere quel risultato, non essendoci variabili.)

Se invece i valori delle costanti **non** appartengono al valore di F, allora l’assegnazione **non** soddisfa la formula, di nuovo banalmente.

(Banalmente, perche` qualsiasi cosa faccia l’assegnazione , qualsiasi valore dia alle varibaili, la formula non viene mai soddisfatta, non essendoci variabili. L’assegnazione g e` impotente).

Quindi: **se non ci sono variabili** in una formula atomica, **o tutte le assegnazioni la soddisfano** (banalmente) **o nessuna la soddisfa** (banalmente).

Quando **tutte le assegnazioni soddisfano** una formula diciamo che la formula e` **vera**.

**Verita`** = **essere soddisfatto da tutte le assegnazioni** di valori alle variabili.

(falsita` = non essere soddisfatto da nessuna assegnazione)

# Semantica del predicato di identita`

1b.

Siccome abbiamo anche il predicato di indentita` ‘=’ a cui vogliamo dare un significato fisso in ogni modello, dobbiamo avere una clausola per lui.

Diremo quindi che l’assegnazione g soddisfa ‘t=r’ (dove t e r possono esser lo stesso termine) sse

$g_M(t)$ o $I_M(t)$ (g o I, a seconda che t sia una variabile o una costante)

*e` uguale a* $g_M(r)$ o $I_M(r)$ (g o I, a seconda che t sia una variabkle o una costante)

Ovvero, t=r e` soddisfatta da g in M, sse t e r sono interpretati come termini per lo stesso oggetto.

# Soddisfazione di formule aperte complesse

# Semantica delle formule con connettivi

Il significato dei connettivi e` specificato dicendo come essi contribuiscono a determinare la soddisfazione di enunciati complessi.

Qua non facciamo altro che adattare le clausole del linguaggio proposizionale (tavole di verita`).

Il linguaggio predicativo, infatti, e` un’estensione di quello proposizionale.

**2a. Soddisfazione di formule complesse con connettivi**

**Negazione.**

Se A e` una fbf di L1 (NB non per forza atomico), allora

g soddisfa - A in M, sse g *non* soddisfa A in M.

## 2b. Connettivi binari

Se A,B sono fbf di L1 (NB non per forza atomici), allora:

g soddisfa A&B in M sse g soddisfa A in M *e* g soddisfa B in M.

g soddisfa AvB in M sse g soddisfa A in M *o* g soddisfa B in M g soddisfa A → B in M sse g *non* soddisfa A in M o g soddisfa B in M.

g soddisfa A ↔ B in M sse g soddisfa A e B in M, o g *non* soddisfa A e non soddisfa B in M.

# Semantica delle formule quantificate

## 3. Quantificatori

Se A e` una fbf, allora

g soddisfa $\forall x A$ sse **ogni** g’, diversa da g *al massimo** per il valore dato a x, soddisfa A.

g soddisfa $\exists x A$ sse **qualche** g’, diversa da g *al massimo** per il valore dato a x, soddisfa A.

Due osservazioni:

1.

L'idea base e` intuitiva:

$\forall x A$ vuol dire che **ogni oggetto** del dominio e` A.

Quindi x deve soddisfare A, qualsiasi oggetto gli sia assegnato. Quindi per **ogni assegnazione**.

Analogamente, $\exists x A$ vuol dire che **qualche oggetto** del dominio e` A.

Quindi x deve soddisfare A almeno per qualche oggetto che gli sia assegnato. Quindi per **qualche assegnazione**.

2.

La clausola * per cui *g' deve essere diversa da g al massimo per il valore dato a x* vuol dire che g` combacia con g per il valore dato a tutte le altre variabili (y,z,w, …) ma puo` cambiare (ma non per forza) sul valore dato a x.

Siccome si considera l'insieme di tutte le assegnazioni, hai comunque anche tutte quelle che cambiano su x, e che quindi danno via via a x il valore di ogni oggetto del dominio.

Ma perche` sulle altre variabili il valore deve rimanere uguale?

Non puo’ cambiare su tutte?

No.

Perche` la formula formula A potrebbe anche contenere altre variabili. E la valutazione corretta della formula puo` dipendere dal valore gia` dato a queste altre.

Ad esempio:

Ogni marinaio ama una ragazza bruna, letta come:

$\exists x \forall y A(y,x)$

Ovvero c’e` una certa ragazza (ad esempio Beatrice) che ogni marinaio ama.

Per la clausola di $\exists x$, abbiamo che g soddisfa la formula $\exists x \forall y A(y,x)$ se c’e` qualche assegnazione g` (diversa al massimo per x) che soddisfa $\forall y A(y,x)$.

Quindi dobbiamo prima vedere se g` soddisfa $\forall y A(y,x)$.

Per la clausola di $\forall y$, questo succede se ogni altra assegnazione g’’ (diversa al massimo per y) soddisfa A(y,x).

Quindi ci serve una serie di assegnazioni, dove il valore di x e` fissato, e per ogni valore di y, A(y,x) e` soddisfatta.

Ad esempio, se g’ e` l’assegnazione che assegna proprio Beatrice a x, (ottenendo A(y,Beatrice)) allora **qualsiasi** valore sia dato a y, si avra` una formula soddisfatta, perche` ogni marinaio ama Beatrice. Quindi **tutte** le g che variano al massimo su y soddisferanno A(y,x)

Avremo:

Per g’1 allora A(Luigi,Beatrice) --→ Vera

Per g’2, allora A(Federico,Beatrice) --→ Vera

Per g’3, allora A(Luca,Beatrice) ---→ Vera

Ecc.

NB: ci servono tutte le assegnazioni, perche` stiamo valutando $\forall y$.

**Nota:**

Se non si tenesse fisso il valore di x (Beatrice) la cosa non tornerebbe, perche` non sarebbe piu` vero che per **ogni** assegnazione di valori a y la formula sarebbe soddisfatta.

Perche` cambierebbe anche x.

Ad esempio, potremmo avere:

g!1, A(Luigi, Luisa) → Falsa!

g!2, A(Luca,Marta) → Falsa!

g!3, A(Simone,Federica) → Falsa!

G!4, A(Alberto, Beatrice) → Vera

Quindi e` cruciale che le assegnazioni che si considerano varino al massimo, solo per la variabile che si sta considerando, tenendo fisse le altre.

Nota:

Questa clausola serve sempre?

No. In certi casi e` irrilevante. Ad esempio, se c’e` solo una variabile.

Ma noi vogliamo clausole generali che valgano sempre.

## Verita` in un modello

## Formula chiuse - Enunciati

Come gia` visto per le formule atomiche, cosa succede se non ci sono variabili libere?

Ovvero se ci sono o  solo costanti, o variabili vincolate?

Ovvero, cosa succede se si considera la soddisfazione di una formula chiusa, ovvero di un enunciato?

Succede che o tutte le assegnazioni soddisfano la formula, o nessuna lo fa.

Esempio:

Qualche numero e` piu’ piccolo di 2.:

$\exists x\ (N(x)\ \&\ (x<2))$

Per la clausola di $\exists x$,

Una assegnazione g soddisfa la formula, se c'e` **qualche assegnazione g`** che e` o uguale a g, o diversa al massimo per il valore di x, che la soddisfa.

E chiaramente c'e`. Basta che g` sia una assegnazione che da` valore 1 o 0 a x.

Quindi g soddisfa la formula (per il tramite di g`).

Ma questo sarebbe successo anche se avessimo considerato una assegnazione diversa da g.

Avessimo considerato l’assegnazione f, anche f avrebbe soddisfatto la formula perche` c’e` una valutazione (sempre g`) che da` valore 1 o 0 a x.

Quindi anche f soddisfa la formula (sempre per il tramite di g`).

Lo stesso vale, chiaramente, anche per altre assegnazioni m, n, eccetera.

Quindi, se c’e` modo di soddisfare la formula, tutte le assegnazioni (g,f,m,n…) la soddisfano (grazie al passaggio obbligato a g’, o a altre simili...)

Per le costanti si ottiene l'irrilevanza delle assegnazioni allo stesso modo che negli enunciati atomici (dove o tutte o nessuna soddisfano una formula, banalmente)

Quindi, in generale per gli enunciati (atomici e non) abbiamo che:

la verita` di un enunciato (in un modello) consiste nell’essere soddisfatto da tutte le assegnazioni.

(Falsita` (in un modello) nel non esser soddisfatto da nessuna assegnazione)

Se A e` un enunciato, e M e` un modello,

Se A e` vero in M scriviamo:

M |= A

NB

Modello puo` essere usato in due modi:

1. A volte si usa il termine “modello” solo per le strutture che rendono veri certi enunciati.

In questo senso se si dice che M e` modello di A, si intende che A e` **vero** in M.

2. Altre volte, si usa modello per parlare di una **struttura interpretativa** in cui A e` interpretato, anche se A risulta falso in M.

# Esempi

(Capitolo 5, p.159)

# Costruire e usare modelli

Vedere eserciziario, capitolo 5.2 semantica p. 191

# Verita` logica

- Linguaggio proposizionale ---> tavole di verità

- Linguaggio predicativo ---> modelli

- Una **tautologia** è un enunciato vero in ogni riga della tavola di verità.

- Una **verità logica** è un enunciato ***vero in ogni modello***.

# Esempi:

$\forall y(y = y)$ (non una tautologia).

$P(t) \rightarrow \exists x Px$ (non una tautologia).

- Poiché il calcolo dei predicati è un'estensione del calcolo proposizionale,

  - Ogni tautologia è una verità logica (ma non viceversa).

- E ogni argomento valido nella logica proposizionale è valido nella logica dei predicati (ma non viceversa).

- Ovvero, i verdetti positivi della logica proposizionale sono corretti.

  Se qualcosa e` valido gia` nel linguaggio proposizionale, rimane valido anche nel predicativo.

- Se non e` valido, pero` potrebbe diventare valido andando piu` a fondo, nel predicativo.

  (in accordo con quanto sappiamo: meglio sempre dare la forma piu` analizzata)

# Conseguenza logica

- Allo stesso modo, per la  conseguenza logica, utilizziamo i modelli, invece che le tavole di verità.

- Se $A_1$,… $A_1$, B sono enunciati di L1,

  B e` conseguenza logica di $\{A_1, \ldots A_1\}$,

- se non esiste un modello M, t.c. $M \models \{A_1, \ldots A_1\}$ ma **non** $M \models B$

  (Cioe` un modello che rende vere tutte le premesse, ma falsa la conclusione).

- Oppure (equivalente)

- Per ogni modello M, se M $\models$ $\{A_1, \ldots A_1\}$, allora M $\models$ B

  (Cioe`ogni modello che rende vere tutte le premesse, rende vera anche la conclusione).

- Nota che questa e` una versione formale della nostra caratterizzazione iniziale:

  Un argomento e` valido, se **in ogni caso** in cui le premesse sono vere, anche la conclusione e` vera, in virtu` della forma.

  Dove i **casi** sono stati sostituiti e precisati dai **modelli**,

  e la **forma logica** e` implicita nell'aver tenuto fisse le interpretazioni delle **costanti logiche**.

- Nota anche che con L1, purtroppo la procedura non e` piu` meccanica.

- Non abbiamo dato un modo sistematico per avere i modelli che rendono vere o false le formule.

- Sarebbe quindi molto utile se avessimo un calcolo (completo) per L1.

- Lo daremo estendendo il calcolo per il linguaggio proposizionale.

# Fine semantica del linguaggio predicativo