## ESERCIZI SU SISTEMI DI GENERATORI E INDIPENDENZA LINEARE
## ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
## MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
## A.A. 2023/24

### Esercizio 1

Considera i seguenti due vettori in $\mathbb{R}^2$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Dimostra** che il vettore $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ è combinazione lineare di $v_1$ e $v_2$ determinando $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $v_3 = a \cdot v_1 + b \cdot v_2$.

Considera poi i vettori

$$v_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2' = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**Dimostra** che il vettore $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ è combinazione lineare di $v_1'$ e $v_2'$ determinando $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $v_3 = a \cdot v_1' + b \cdot v_2'$.

*Risoluzione.* Vale che $v_3 = a \cdot v_1 + b \cdot v_2$ se

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 3b \\ -2a + 2b \end{pmatrix}$$

Devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} a + 3b = 1 \\ -2a + 2b = 1 \end{cases}$$

Usiamo la gradinizzazione di Gauss per risolvere il sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il sistema è dunque equivalente a quello con matrice completa data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo quindi la soluzione

$$a = -\frac{1}{8} \qquad b = \frac{3}{8}$$

Abbiamo pertanto che $v_3 = (-1/8)v_1 + (3/8)v_2$.

Nel secondo caso, analogamente al primo abbiamo che $v_3 = a \cdot v_1' + b \cdot v_2'$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-5b \\ 3a+4b \end{pmatrix}$$

Devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -a-5b & = & 1 \\ 3a+4b & = & 1 \end{cases}$$

Usiamo la gradinizzazione di Gauss per risolvere il sistema:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il sistema è dunque equivalente a quello con matrice completa data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -11 & 4 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo quindi la soluzione

$$a = \frac{9}{11} \qquad b = -\frac{4}{11}$$

Abbiamo pertanto che $v_3 = (9/11)v_1 + (-4/11)v_2$.

## Esercizio 2

Sia $U \subseteq \mathbb{Q}^3$ il sottospazio vettoriale dato da

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \mid 3x - y + 2z = 0 \right\}.$$

**Determina** un sistema di generatori per $U$.

Sia $U \subseteq \mathbb{Q}^4$ il sottospazio vettoriale dato da

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \mid \begin{cases} 3x - y + 2z & = & 0 \\ 2y + z - w & = & 0 \end{cases} \right\}.$$

**Determina** un sistema di generatori per $U$.

*Risoluzione.* Consideriamo

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \mid 3x - y + 2z = 0 \right\}.$$

Notiamo quindi che se un elemento di $U$ soddisfa $3x - y + 2z = 0$ allora vale che $y = 3x + 2z$. Pertanto, ogni elemento di $U$ è della forma

$$\begin{pmatrix} x \\ 3x+2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi che i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono un sistema di generatori per $U$.

Consideriamo ora

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \;\middle|\; \begin{cases} 3x - y + 2z &= 0 \\ 2y + z - w &= 0 \end{cases} \right\}.$$

Notiamo che la matrice completa del sistema lineare che descrive gli elementi di $U$ è a scala:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi che per gli elementi di $U$ vale che

$$\begin{cases} x &= -\frac{5}{6}z + \frac{1}{6}w \\ y &= -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w \end{cases}$$

Pertanto essi sono della forma

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{6}z + \frac{1}{6}w \\ -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6}z \\ -\frac{1}{2}z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6}w \\ \frac{1}{2}w \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi che i vettori

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono un sistema di generatori per $U$.

## Esercizio 3

Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $K$. Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ e sia $v$ una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$. **Dimostra** che

$$\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n, v)\,.$$

*Risoluzione.* Per ipotesi abbiamo che esistono $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$ tali per cui

$$v = \mu_1\, v_1 + \cdots + \mu_n\, v_n\,.$$

Dimostriamo l'uguaglianza dei due insiemi tramite doppia inclusione.

"$\subseteq$" Sia $w \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$, mostriamo che $w \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n, v)$. Per ipotesi esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che $w = \lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_n\, v_n$. Allora possiamo scrivere

$$w = \lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_n\, v_n + 0 \cdot v\,,$$

da cui segue che $w \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n, v)$.

"$\supseteq$" Sia $w \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n, v)$, mostriamo che $w \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n)$. Per ipotesi esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in K$ tali che $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda v$. Ricordando che $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} w &= (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) + (\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n) \\ &= (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n) v_n \,. \end{aligned}$$

Quindi $w \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n)$.

## Esercizio 4

Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $K$. **Dimostra** che

(1) se $U \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale e $\{u_1, \dots, u_n\}$ è un sistema di generatori per $U$, allora per ogni $u \in U$, anche $\{u_1, \dots, u_n, u\}$ è un sistema di generatori per $U$;
(2) se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti, allora per ogni $m \leq n$ anche $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti.

*Risoluzione.*

(1) Sia $u \in U$. Per ipotesi $U = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_n)$ e quindi $u$ è combinazione lineare di $u_1, \dots, u_n$. Per l'esercizio precedente $\operatorname{span}(u_1, \dots, u_n) = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_n, u)$ e pertanto $U = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_n, u)$, quindi $\{u_1, \dots, u_n, u\}$ è un sistema di generatori per $U$.
(2) Sia $m \leq n$ e supponiamo che

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = 0 \,.$$

Dobbiamo dimostrare che tutti i coefficienti della combinazione lineare sono nulli. Possiamo scrivere

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m + 0 \cdot v_{m+1} + \cdots + 0 \cdot v_n = 0 \,.$$

Dal momento che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, allora tutti i coefficienti della precedente combinazione lineare devono essere nulli, e quindi

$$\lambda_1 = 0 \,, \quad \dots \quad , \lambda_m = 0 \,.$$

Pertanto $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti.

## Esercizio 5

Sia $A \in M_{m,n}(K)$ una matrice a scala, dove $K$ è un campo. Supponi che $A$ sia diversa dalla matrice nulla. Siano $A_{(1)}, \dots, A_{(m)}$ le righe di $A$: esse sono dunque vettori in $K^n$. Siano $A_{(1)}, \dots, A_{(r)}$ le righe non-nulle di $A$, per un certo $r \leq m$ con $r > 0$. **Dimostra** che $A_{(1)}, \dots, A_{(r)}$ sono linearmente indipendenti.

*Risoluzione.* Per ipotesi, la matrice $A$ ha la forma seguente:

$$\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & a_{1,j_1} & * & * & * & * & * & * & * & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2,j_2} & * & * & * & * & \dots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & & \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{r,j_r} & * & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

dove gli elementi $a_{i,j_i}$ sono non nulli per $i \in \{1, \dots, r\}$ ed $r > 0$. Formiamo una combinazione lineare delle prime $r$ righe

$$\lambda_1 A_{(1)} + \cdots + \lambda_r A_{(r)}$$

e supponiamo che essa sia il vettore nullo. La componente di posto $j_1$ di tale combinazione lineare è uguale a $\lambda_1 a_{1,j_1}$. Dato che $a_{i,j_1} \neq 0$, otteniamo che $\lambda_1 = 0$. A questo punto, la componente di posto $j_2$ di tale combinazione lineare è $\lambda_2 a_{2,j_2}$, da cui otteniamo che $\lambda_2 = 0$. Procedendo così dimostriamo che tutti i $\lambda_i$ per $i \in \{1, \dots, r\}$ sono nulli e pertanto $A_{(1)}, \dots, A_{(r)}$ sono linearmente indipendenti.