Lezione 22 novembre 2023

mercoledì 22 novembre 2023 11:14

Visto: $f: V \to V'$ AL se (AL1)

V, V' SV su K (AL2)

$\operatorname{Im} f = f(V) \subseteq V'$ è SSV di V'

$\ker f \subseteq V$ NUCLEO di f

$= \{v \in V : f(v) = 0_{V'}\}$

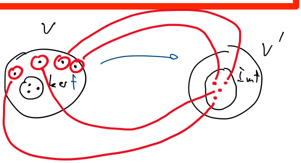
TEO. DI DIMENSIONE PER AL

Supp. $\dim V < +\infty$ e sia $f: V \to V'$ AL.

Allora si ha

$$\dim V = \dim \ker f + \underbrace{\operatorname{rg} f}_{:= \dim \operatorname{Im} f}$$

Dim.:



Partiamo da base di $\ker f$

$\mathcal{B}_{\ker f} = \{v_1, \dots, v_r\}$, $r = \dim \ker f$

$\ker f \subseteq V$ è SSV

estendo $v_1, \dots, v_r$ a base di V

$\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$

Affermo: $\{f(u_{r+1}), \dots, f(u_n)\}$ è base di $\operatorname{Im} f \subseteq V'$.

Infatti: sono generatori per $\operatorname{Im} f$:

so già che se $\{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$ base di V ⇒ le immagini sono generatori per $\mathrm{Im} f$

$\forall w \in \mathrm{Im} f$, $\exists v \in V$ t.c. $w = f(v)$

$w = f(a_1 v_1 + \dots + a_r v_r + a_{r+1} u_{r+1} + \dots + a_n u_n)$

(AL) $= a_1 f(v_1) + \dots + a_r f(v_r) + a_{r+1} f(u_{r+1}) + \dots + a_n f(u_n)$

Nel nostro caso: $v_1, \dots, v_r \in \ker f$

$\Rightarrow f(v_1) = 0_{V'}, \dots, f(v_r) = 0_{V'}$

$= a_{r+1} f(u_{r+1}) + \dots + a_n f(u_n)$

$\Rightarrow f(u_{r+1}), \dots, f(u_n)$ sono generatori

Vediamo ora che sono linearmente indipendenti:

Sia $c_{r+1} f(u_{r+1}) + \dots + c_n f(u_n) = 0_{V'}$

(AL) $= f(c_{r+1} u_{r+1} + \dots + c_n u_n) = 0_{V'}$

$\Downarrow$

$c_{r+1} u_{r+1} + \dots + c_n u_n \in \ker f \subseteq V$

base $\mathcal{B}_{ker} = \{v_1, \dots, v_r\}$

$\Rightarrow c_{r+1} u_{r+1} + \dots + c_n u_n = b_1 v_1 + \dots + b_r v_r$

$b_1 v_1 + \dots + b_r v_r - c_{r+1} u_{r+1} - \dots - c_n u_n = 0_V$

ora: $\{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$ base di V

⇒ LIN. INDIP. $\Rightarrow b_1 = \dots = b_r = c_{r+1} = \dots = c_n = 0$

in particolare $c_i = 0 \quad \forall\, i = r+1, \dots, n$

$\Rightarrow f(u_{r+1}), \dots, f(u_n)$ sono LIN. INDIP.

⇒ formano base

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = n - r = \dim V - \dim \ker f$$

COR.: Sia $A \cdot x = 0$ un SLO, $A \in M_{m,n}(K)$.
Sia W il ssv delle soluzioni, $W \subseteq K^n$.
Allora $\dim W = n - \operatorname{rg} A$.

Dim.: Cons. $L_A : K^n \to K^m$

$$L_A\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \underbrace{\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}}_{m \times 1} \in K^m$$

L_A è AL.

Applico Teo di Dim.:

$$\underset{\substack{\| \\ n}}{\dim K^n} = \underbrace{\dim \ker L_A}_{= ?} + \underset{\substack{\| \\ \operatorname{rg} A}}{\operatorname{rg} L_A}$$

$$\ker L_A = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n : L_A\left(\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}\right) = 0_{K^m} \right\}$$

$$= A \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= W$$

$$\Rightarrow n = \dim W + \operatorname{rg} A$$

$\Rightarrow \dim W = n - \operatorname{rg} A$

OSS.: ① Nel caso $f = L_A$, abbiamo visto che

$\ker L_A = \{\text{soluzioni di } A \cdot x = 0\}$

② $f = L_A$, $\operatorname{Im} L_A = \{w \in K^m : \exists\, v \in K^n \text{ t.c. } w = L_A(v)\}$

$$\underset{K^m}{\underset{\cap}{w}} = A \cdot \underset{K^n}{\underset{\cap}{v}}$$

$= \{w \in K^m : \text{il SL } A \cdot x = w \text{ ammette almeno 1 soluz. } v \in K^n\}$
$(A \cdot v = w)$

$= \{w \in K^m : A \cdot x = w \text{ è compatibile}\}$

COR.: Supp. $\dim V = \dim V'$, e $f: V \to V'$ A.L.
Sono equivalenti:

① $\ker f = \{0_V\}$ ($\Leftrightarrow$ f iniettiva)

② f suriettiva ($\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = V'$)

③ f biiettiva (f si dice **ISOMORFISMO**)

① $\Leftrightarrow$ ② $\Leftrightarrow$ ③

Dim.: ① $\Rightarrow$ ②

Supp. ① $\ker f = \{0_V\}$

Teo. Dimens. : $\dim V = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$

$\overset{!}{=} \dim \{0_V\} + \operatorname{rg} f$

$\overset{!}{=} 0 + \operatorname{rg} f$

$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f = \dim V = \dim V'$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f \subseteq V'$ hanno la stessa dim

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = V' \Rightarrow f$ suriettiva ②

Supp. ② vera : f suriettiva: $\operatorname{Im} f = V'$

$\dim V = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$

$\overset{!}{=} \dim \ker f + \dim V'$

$$\underbrace{\dim V - \dim V'}_{=0} = \dim \ker f$$

$\Rightarrow \ker f = \{0_V\}$, f iniettiva

$$\begin{tikzcd} ① \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & ③ \\ ② \arrow[ur, Leftrightarrow] & \end{tikzcd}$$

Teorema: Siano V e V' di dim. finita su $\mathbb{K}$.

Allora $V \underset{\downarrow}{\cong} V' \longleftrightarrow \dim V = \dim V'$

isomorfi

(cioè $\exists$ isomorfismo $f: V \to V'$)

Dim.: Supp. $V \cong V'$; $\exists$

$f: V \to V'$ isomorfismo ; $\ker f = \{0_V\}$, $\operatorname{Im} f = V'$

Teo. di Dimens. $\dim V = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$

$= 0 + \dim V'$

$\Rightarrow \dim V = \dim V'$

Viceversa: Supp. $\dim V = \dim V'$

devo esibire una $f: V \to V'$ isomorfismo.

Fisso una base di V:

$\{v_1, .., v_n\} = \mathcal{B}_V$

e fisso una base di V': $\{w_1, ---, w_n\}$

Per il Teo. di Struttura di AL:

$$\exists!\ f: V \to V' \text{ t.c. } \begin{aligned} f(v_1) &= w_1 \\ f(v_2) &= w_2 \\ &\vdots \\ f(v_n) &= w_n \end{aligned}$$

Verifico che f è ISOMORF.:

Per il Corollario, basta controllare che f sia suriettiva:

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}(f(v_1), .., f(v_n))$$

$$= \operatorname{Span} \underbrace{(w_1, .., w_n)}_{\text{base di } V'} = V'$$

(per curiosità: f iniettiva:

$\ker f = \{v \in V : f(v) = 0_{V'}\}$

$f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = 0_{V'}$

$a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) = 0_{V'}$

$a_1 w_1 + \dots + a_n w_n = 0$ $\qquad w_1, .., w_n$ LIN. IND

$\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$

$\Rightarrow v = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n = 0_V$

Esempi di isom.:

① $\mathbb{R}[x]_{\leq 3} = V$, $V' = M_2(\mathbb{R})$

$= \{p(x)$ polinomi di grado $\leq 3\}$

$\dim V = 4 = \dim V'$

$f: \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to M_2(\mathbb{R})$

$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f(x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$f(a+bx+cx^2+dx^3) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

② Sia $\dim V = n$, e fissiamo base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

Cons. APPLICAZIONE COORDINATA

$$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n$$

$v \longrightarrow$ colonna delle coordinate di v nella base $\mathcal{B}$

è un isomorfismo:

$$F_{\mathcal{B}}(v+u) \underset{?}{=} F_{\mathcal{B}}(v) + F_{\mathcal{B}}(u) \quad \text{sì}$$

$$\left.\begin{array}{ll} F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} & \text{dove} \quad v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_1 \\ F_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} & \text{dove} \quad u = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \end{array}\right\} +$$

$$v+u = (a_1+b_1)v_1 + (a_2+b_2)v_2 + \dots + (a_n+b_n)v_n$$

$$F_{\mathcal{B}}(v+u) = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$$

$F_{\mathcal{B}}$ è omogenea: $F_{\mathcal{B}}(c \cdot v) = c \cdot F_{\mathcal{B}}(v)$ sì

(esercizio)

$$F_{\mathcal{B}} : V \to K^n, \quad \dim V = n = \dim K^n$$

Basta verificare che $F_{\mathcal{B}}$ è suriettiva

Sia $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in K^n$; $\exists\, v \in V$ t.c.

$$F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \; ?$$

sì: $v = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_n v_n$

QUINDI:

Se $\dim V = n$, allora $V \cong K^n$

cioè: OGNI SV DI DIM. FINITA SI PUÒ IDENTIFIC. CON SP. di tipo K^n

K^n si chiama MODELLO NUMERICO di V.

OSS: Se $m \neq n$, sicuramente

$$K^m \not\cong K^n$$

es: $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^3$