Lezione 23 novembre 2023

giovedì 23 novembre 2023 11:11

Visto: AL ; Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$$L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \,,\quad L_A(v) := A \cdot v$$

$$v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

OGGI: Se $f : V \to V'$ con V e V' di dimensione finita, allora f AL è del tipo molt. per matrice.

OSS: Se $\underbrace{\{v_1, \dots, v_n\}}_{=\mathcal{B}}$ è base di V

$f : V \to V'$ AL ; $\forall v \in V$

$$\boxed{v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ sono le COORD. di v in $\mathcal{B}$

$$f(v) = f(b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) \overset{\text{AL}}{=}$$

$$\circledast \qquad = b_1 f(v_1) + \dots + b_n f(v_n)$$

Ora: fisso una base $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$ di V'

posso riscrivere $\circledast$ in coordinate formalmente:

$$F_{\mathcal{B}'} : V' \longrightarrow \mathbb{K}^m \quad \text{è iso.}$$

$$F_{\mathcal{B}'}(w) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

dove $w = c_1 w_1 + \dots + c_m w_m$

$$\circledast \quad \underbrace{F_{\mathcal{B}'}(f(v))}_{} = F_{\mathcal{B}'}(b_1 f(v_1) + \dots + b_n f(v_n))$$

COORD. di $f(v)$ in $\mathcal{B}'$

$$= b_1 \underbrace{F_{\mathcal{B}'}(f(v_1))}_{} + \dots + b_n F_{\mathcal{B}'}(f(v_n))$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = b_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + b_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}$$

coord. di v in $\mathcal{B}$

coord. di $f(v_1)$ in $\mathcal{B}'$

COORD. di $f(v_2)$ in $\mathcal{B}'$

coord. di $f(v_n)$ in $\mathcal{B}'$

visto nei SL :

$$\left(A\cdot s = b \iff s_1\cdot A^{(1)} + s_2\cdot A^{(2)} + \dots + s_n\cdot A^{(n)} = b\right)$$

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

Def.: Sia V e V' SV su $\mathbb{K}$; siano

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di V'

$f: V \to V'$ AL.

Definiamo la **MATRICE ASSOC. AD f nelle BASI $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$:**

$$\underset{m\times n}{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)} := \left.\underbrace{\begin{pmatrix} \text{coordinate di } f(v_1) \text{ nella } \mathcal{B}' & \text{coordinate di } f(v_2) \text{ nella } \mathcal{B}' & \cdots & \text{coordinate di } f(v_n) \text{ nella } \mathcal{B}' \end{pmatrix}}_{n}\right\} m$$

(Δ alcuni testi $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$, opp. $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$)

PROP: V, V' SV, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi, $f: V \to V'$ AL, e cons. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Allora: $\forall\, v \in V$, se $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ è la colonna delle coordinate di v nella $\mathcal{B}$, le coordinate di $f(v)$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$, sono così ottenute:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Dim. Vedi sopra

Commento: Se fisso basi, OGNI AL è del tipo MOLT. PER UNA MATRICE.

OSS.: Cons. $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(L_A) = ?$

con $\mathcal{E} = \{e_1, .., e_n\}$ base canonica di $\mathbb{K}^n$

$\mathcal{E}' = \{e'_1, .., e'_m\}$ base canonica di $\mathbb{K}^m$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(L_A) = \begin{pmatrix} \text{coordinate di } L_A(e_1) \text{ in } \mathcal{E}' & \text{coordinate di } L_A(e_2) \text{ in } \mathcal{E}' & \cdots & \text{coordinate di } L_A(e_n) \text{ in } \mathcal{E}' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{coordinate di } A \cdot e_1 & \text{coord. di } A \cdot e_2 & \cdots & \text{coord. di } A \cdot e_n \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot e_1 = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A^{(1)}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$A \cdot e_n = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{(n)}$$

Infine, le coordinate $A^{(1)}$ nella base canonica $\mathcal{E}'$ coincidono con le componenti (le entrate del vettore colonna)

Similmente, coord. $A^{(i)}$ coincidono con le sue componenti

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

nella $\mathcal{E}'$, le coordinate di $A^{(1)}$ sono proprio a_{i1}:

$$A^{(1)} = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{m1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{coordinate di } A\cdot e_1 & \text{coord. di } A\cdot e_2 & \cdots & \text{coord. di } A\cdot e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} & \cdots & A^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(L_A)$$

Oss.: Sia $f: V \to V'$ l'AL nulla
$(f(v) = 0_{V'} \quad \forall v \in V)$

Fisso $\mathcal{B}$ base qualunque di V
fisso $\mathcal{B}'$ base qualunque di V'

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = O$$ MATRICE NULLA

$\Longrightarrow$ AL nulla ha matrice associata la matrice nulla per qualunq. scelta di basi

Esempio: $f: V \to V$, $f = \mathrm{Id}_V$ identità in V
$f(v) = v$

Fisso $\mathcal{B}$ in V

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$f(v_1) = \mathrm{Id}_V(v_1) = v_1$
le sue coordinate in $\mathcal{B}$: $v_1 = 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + \dots + 0\cdot v_n$
$f(v_2) = v_2$

$\Longrightarrow$ $\forall$ scelta di base $\mathcal{B}$ di V, si ha

$$\boxed{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) = \mathbb{I}_n}$$

ATTENZIONE : Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono 2 basi diverse di V

$$Id_V : \underset{\mathcal{B}}{V} \to \underset{\mathcal{C}}{V} \quad , \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V) \neq I_n$$

COROLLARIO: $f : V \to V'$ AL, $\mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{B}'$ base di V', sia $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$

Allora :

$$\boxed{\ker f} = \left\{ v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \;\middle|\; M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ è sol. di } M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot X = 0$$

$$\operatorname{Im} f = \left\{ w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m : \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot X \text{ è SL compatibile} \right\}$$

Esempi: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

è AL:

$$f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} y_1+z_1 \\ y_2+z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_2+z_2 \\ y_1+z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$f\left(c \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \dots = c \cdot f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Cons. $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\underset{2 \times 2}{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)} = \begin{pmatrix} \text{coord. di } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) & \text{coord di } f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora : in $\mathbb{R}^2$ come dominio

cons. $\mathcal{B}$;

cons. base $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

in $\mathbb{R}^2$ come codominio cons $\mathcal{E}$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} \text{coord. di } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ in } \mathcal{E} & \text{coord. di } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ in } \mathcal{E} \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\neq$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \text{coord. } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ in } \mathcal{B} & \text{coord. } f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ in } \mathcal{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot b_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 & \Rightarrow a_2 = -1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{cases} b_1 + b_2 = 1 & \Rightarrow b_2 = 1 \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

Cons. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \text{coord. } f\left(\binom{1}{1}\right) \text{ in } \mathcal{B} & \text{coord di } f\left(\binom{1}{0}\right) \text{ in } \mathcal{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$f\left(\binom{1}{1}\right) = \binom{1}{1} = a_1 \cdot \binom{1}{1} + a_2 \cdot \binom{1}{0}$$
$$= 1 \cdot \binom{1}{1} + 0 \cdot \binom{1}{0}$$

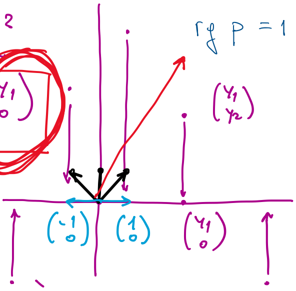
$$f\left(\binom{1}{0}\right) = \binom{0}{1} = b_1 \cdot \binom{1}{1} + b_2 \binom{1}{0}$$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases}, \quad b_2 = -1$$

Esempio: proiezione:

$p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\boxed{p\left(\binom{y_1}{y_2}\right) = \binom{y_1}{0}}$$



$\operatorname{rg} p = 1$; $\operatorname{Im} p = \left\{ \binom{y_1}{0} : y_1 \in \mathbb{R} \right\} \overset{!}{=} \operatorname{Span}\left(\binom{1}{0}\right)$

$\dim \operatorname{Im} p = 1$

p è AL ? sì

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p\left(\binom{1}{0}\right) = \binom{1}{0}$$
$$p\left(\binom{0}{1}\right) = \binom{0}{0}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \binom{1}{1}, \binom{-1}{1} \right\}$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$p\left(\binom{1}{1}\right) = \binom{1}{0} = a_1 \cdot \binom{1}{1} + a_2 \cdot \binom{-1}{1} = \frac{1}{2} \cdot \binom{1}{1} - \frac{1}{2} \binom{-1}{1}$$

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 1 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$2a_2 = -1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}$

$a_1 = 1 + a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$p\left(\binom{-1}{1}\right) = \binom{-1}{0} = b_1 \binom{1}{1} + b_2 \binom{-1}{1} = -\frac{1}{2} \binom{1}{1} + \frac{1}{2} \binom{-1}{1}$$

$$\begin{cases} b_1 - b_2 = -1 \\ b_1 + b_2 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$2b_2 = 1, \qquad b_2 = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = -1 + b_2 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

OSS: $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = 1$

Non è un caso!

PROP.: $f: V \to V'$, dim finite.

Allora $\text{rg} f \,(= \dim \text{Im} f) = \text{rg}\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$

con $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi arbitrarie.

Dim: $\text{rg} f = \dim \text{Im} f = \dim \text{Span}(f(v_1), .., f(v_n))$

Se $\mathcal{B} = \{v_1, .., v_n\}$ base di V

$$F_{\mathcal{B}'}(f(v_1)) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}'$ base di V'

$$\vdots$$

$$F_{\mathcal{B}'}(f(v_n)) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{rg} f = \dim \underbrace{\text{Span}(f(v_1), .., f(v_n))}_{= W} = \dim \underbrace{\text{Span}\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, .., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right)}_{\parallel} = \dim \text{Span}\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)^{(1)}, \dots, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)^{(n)}\right)$$

$$= \text{rg}\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$$

$$W \subseteq V' \longrightarrow F_{\mathcal{B}'}(W)$$

$F_{\mathcal{B}'}$ è isomorfismo $\Rightarrow \dim W = \dim F_{\mathcal{B}'}(W)$