Lezione 24 novembre 23

venerdì 24 novembre 2023 11:17

Visto: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$, $\mathcal{B}$ base di V

$\mathcal{B}'$ base di V'

$f : V \to V'$

Prop.: Siano V e V' sv su $\mathbb{K}$, $\dim V = n$, $\dim V' = m$

fisso $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi, risp.

Allora la funzione

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} : \underbrace{\{AL\ f : V \to V'\}}_{\text{è SV? sì}} \to \underbrace{M_{m,n}(\mathbb{K})}_{SV\ su\ \mathbb{K}}$$

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$

$=: \mathrm{Hom}(V, V') =$ sv degli OMOMORFISMI (ovvero delle AL)

$\parallel$

opp. $= \mathcal{L}(V, V')$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} : \mathrm{Hom}(V, V') \to M_{m,n}(\mathbb{K})$$

è un' AL, ed è biiettiva

cioè è un ISOMORFISMO.

COROLLARIO: $\dim \mathrm{Hom}(V, V') = \dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$

Verifico ora che $\mathrm{Hom}(V, V')$ è sv su $\mathbb{K}$:

$f, g \in \mathrm{Hom}(V, V')$, $f : V \to V'$ AL

$g : V \to V'$ AL

$f+g : V \to V'$

$(f+g)(v) := f(v) + g(v) \in V'$

$c \in \mathbb{K}$, $f : V \to V'$

$c \cdot f : V \to V'$

$(c \cdot f)(v) := c \cdot f(v) \in V'$

Domanda: $f+g$ è AL ?

$(f+g)(\alpha v_1+\beta v_2) \overset{?}{=} \underbrace{\alpha\cdot(f+g)(v_1)+\beta\cdot(f+g)(v_2)}$

per def. di somme di funz.

$= f(\alpha v_1+\beta v_2)+g(\alpha v_1+\beta v_2)$

f & g sono AL

$= \underbrace{\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)+\alpha g(v_1)+\beta g(v_2)}$

$= \alpha\left(f(v_1)+g(v_1)\right)+\beta\left(f(v_2)+g(v_2)\right)\in V'$

$= \alpha f(v_1)+\alpha g(v_1)+\beta\cdot f(v_2)+\beta g(v_2)$

$= \underbrace{\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)+\alpha g(v_1)+\beta g(v_2)}$

Analog. se f è AL, anche c·f è AL.

Esercizio: Hom(V, V') con + e · verifica $\boxed{V1}, \dots, \boxed{V8}$ assiomi di SV.

Dim. della Prop.:

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ è AL:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\alpha f+\beta g) \overset{?}{=} \underbrace{\alpha\cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)+\beta\cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(g)}_{\in M_{m,n}(\mathbb{K})}$$

$\alpha,\beta\in\mathbb{K}$

$f,g: \mathrm{Hom}(V,V')$

Infatti: $\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\overbrace{\alpha f+\beta g}^{h})\right)_{ij}$ = coordinate i-esima del vettore immagine di v_j $= \alpha\cdot\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)\right)_{ij}+\beta\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(g)\right)_{ij}$

$\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$

$\mathcal{B}'=\{w_1,\dots,w_m\}$

$h=\alpha f+\beta g$

$h(v_j)=(\alpha f+\beta g)(v_j)=\alpha\cdot f(v_j)+\beta\cdot g(v_j)\in V'$

coordinate i di $h(v_j)$ è la somma

$$\alpha \cdot \underbrace{(\text{coord. } i \text{ di } f(v_j))}_{a_{ij}} + \beta \cdot \underbrace{(\text{coord } i \text{ di } g(v_j))}_{b_{ij}}$$

il coeff. di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(g)$ in posiz ij

$$= \alpha \cdot a_{ij} + \beta \cdot b_{ij}$$

il coeff. di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ in posiz. ij

$$(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f))_{ij} = a_{ij}$$

$$= \alpha \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)\right)_{ij} + \beta \cdot \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(g)\right)_{ij}$$

Verifico ora che è biiettiva :

Iniettiva: $\Longleftrightarrow \ker M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \{0_{\mathrm{Hom}(V,V')}\}$

$= $ AL nulla

$$\ker M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \{ f \in \mathrm{Hom}(V,V') \mid M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = 0_{M_{m,n}(K)} \}$$

MATRICE NULLA O

$\circledast$ $\Rightarrow f(v_1) = 0_{V'},\ f(v_2) = 0_{V'}, \dots,\ f(v_n) = 0_{V'}$

Per il Teo. di Struttura per AL, $\exists !\ f$ con i valori assegnati $\circledast$; l'AL nulla verifica $\circledast$, quindi $f =$ applicazione nulla.

$\Longrightarrow \ker M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \{0_{\mathrm{Hom}(V,V')}\} \Longrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ è iniettiva

Infine: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ è suriettiva:

Sia $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$; devo dimostrare che M proviene da una AL $f : V \to V'$

cioè: $M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{pmatrix}$$

Per il Teo. di Struttura per AL, $\exists$ una AL $f : V \to V'$ t.c.

$$f(v_1) = m_{11} w_1 + m_{21} w_2 + \dots + m_{m1} w_m \in V'$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = m_{1n} w_1 + m_{2n} w_2 + \dots + m_{mn} w_m \in V'$$

$\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$

* * *

COMPORTAMENTO DI $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ RISP. ALLA COMPOSIZ. DI AL

Prop.: Cons. 3 SV su $\mathbb{K}$

U, V, W

$\mathcal{D} = \{u_1, \dots, u_p\}$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$

base di U, base di V, base di W

Siano $g : U \to V$, $f : V \to W$ AL

Allora: $f\circ g : \underset{\mathcal{D}}{\overset{p}{U}} \longrightarrow \underset{\mathcal{C}}{\overset{m}{W}}$ è AL (esercizio)

$$(f\circ g)(u) := f(g(u))$$

e

$$\boxed{M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}(f\circ g) = \underbrace{\underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)}_{m\times n} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{prodotto RC}}}{\cdot} \underbrace{M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g)}_{n\times p}}_{m\times p}}$$

$$f : \underset{\mathcal{B}}{\overset{n}{V}} \longrightarrow \underset{\mathcal{C}}{\overset{m}{W}}$$

$$g : \underset{\mathcal{D}}{\overset{p}{U}} \longrightarrow \underset{\mathcal{B}}{\overset{n}{V}}$$

Dim. Siano a_{ij} le entrate di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$

b_{ij} le entrate di $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g)$

$\forall\, k = 1, \dots, n, \quad \forall\, \ell = 1, \dots, p$

$$f(v_k) = a_{1k} w_1 + \dots + a_{mk} w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} w_i$$

$$g(u_\ell) = b_{1\ell} v_1 + \dots + b_{n\ell} v_\ell = \sum_{j=1}^{n} b_{j\ell} v_j$$

$$f(g(u_\ell)) = f\left(\sum_{j=1}^{n} b_{j\ell} v_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{j\ell} f(v_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{j\ell} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right)$$

| prop. distributiva

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{j\ell}\right) w_i$$

$\Rightarrow$ l'i-esima coord. di $f(g(u_\ell))$ è

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} = A_{(i)} \cdot B^{(l)}$$

dove $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)$, $B = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g)$

$$\Rightarrow \left(M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{E}}(f \circ g)\right)_{il} = A_{(i)} \cdot B^{(l)}$$

COROLLARIO: Se $f : V \to V'$ ISOMORFISMO
($\dim V = \dim V'$)

Allora $\forall$ scelta di basi $\mathcal{B}$ di V, $\mathcal{B}'$ di V'

si ha $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ è INVERTIBILE

con inversa: $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$

$f^{-1} : V' \to V$

Dim: f isom. $\Rightarrow \exists\, f^{-1} : V' \to V$

$f \circ f^{-1} : V' \to V'$, $\quad f^{-1} \circ f : V \to V$

$f \circ f^{-1} = Id_{V'}$ $\qquad f^{-1} \circ f = Id_V$

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f \circ f^{-1}) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(Id_{V'})$$

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f \circ f^{-1}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathbb{I}_n = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(Id_{V'})$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(Id_V)$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathbb{I}_n = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(Id_V)$$

COR.: Se $\begin{array}{ccc} f: V & \longrightarrow & V' \\ \mathcal{B} & & \mathcal{B}' \\ \mathcal{C} & & \mathcal{C}' \end{array}$

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(f) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(Id_{V'} \circ f \circ Id_V) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(Id_{V'}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Id_V)$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "Id_V"] \arrow[rrr, bend right] & V \arrow[r, "f"] & V' \arrow[r, "Id_{V'}"] & V' \end{tikzcd}$$

$$Id_{V'} \circ f \circ Id_V = f$$

MATRICI DI CAMBIO DI BASE

Def.: La matrice $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(Id_{V'})$ si dice MATRICE DI CAMBIO DI BASE, dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{C}'$.

OSS.: Questo nome è giustificato dal seguente fatto:

l'applicazione identica

$\begin{array}{ccc} Id_{V'}: V' & \longrightarrow & V \\ \mathcal{B}' & & \mathcal{C}' \end{array}$ è tale che:

$Id_{V'}(w) = w$; per definizione di matrice associata si ha:

$$\boxed{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(Id_{V'}) \cdot \begin{pmatrix} \text{coordinate di } w \text{ in } \mathcal{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coordinate di } w \text{ in } \mathcal{C}' \end{pmatrix}}$$

Quindi: $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(Id_{V'})$ è la matrice che moltiplicata per la n-pla di coordinate di un vettore $w \in V'$ nella base $\mathcal{B}'$, dà luogo alla n-pla di coordinate di w nella base $\mathcal{C}'$.

Infine: per definizione di $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(Id_{V'}) \in M_m(K)$, le sue colonne sono le coordinate di di $w_1, \dots, w_m$ nella base $\mathcal{C}'$.

dove $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$ e

$\mathcal{C}' = \{z_1, \dots, z_m\}$