

Geometria 3 - Topologia

Foglio di esercizi 9

Giustificare adeguatamente le risposte.

- 1) Dimostrare che X_{cof} connesso $\Leftrightarrow X_{\text{cof}}$ ha un punto oppure infiniti.
- 2) Dimostrare che X, Y connessi per archi $\Rightarrow X \times Y$ connesso per archi.
- 3) Dimostrare che T^n è connesso per archi.
- 4) Dimostrare che la retta con due origini è connessa per archi.
- 5) Sia $f: X \rightarrow R$ continua non costante e X connesso. Dimostrare che $f(X)$ è un intervallo. Che tipo di intervallo è $f(X)$ se aggiungiamo l'ipotesi X compatto?
- 6) Dimostrare che le componenti connesse di R_ℓ sono i punti (un tale spazio si dice *totalmente sconnesso*).
- 7) Dimostrare che ogni funzione continua $f: R \rightarrow R_\ell$ è costante.
- 8) Dimostrare che $Q \subset R$ è totalmente sconnesso.
- 9) Sia $A \subset R^n$ finito e $n \geq 2$. Dimostrare che $R^n - A$ è connesso per archi.
- 10) Dire come sono fatte le componenti connesse di un'iperbole in R^2 .
- 11) Dimostrare che X, Y connessi $\Rightarrow X \times Y$ connesso.¹
- 12) Dimostrare che $\text{SO}(2) \cong S^1$.
- 13) Dimostrare che $\text{SO}(n)$ è connesso per archi per $n \geq 1$.²
- 14) Dimostrare che $\text{O}(n)$, per $n \geq 1$, ha esattamente due componenti connesse per archi, di cui una è $\text{SO}(n)$. Dimostrare anche che le due componenti connesse per archi sono tra loro omeomorfe.

¹Suggerimento: esprimere $X \times Y$ come unione di sottospazi del tipo $A_x = (X \times \{y_0\}) \cup (\{x\} \times Y)$.

²Suggerimento: induzione su n , utilizzando una rotazione che mandi l'ultima colonna nell'ultimo vettore della base canonica.